

**Klausur “Operations- und Logistikmanagement”
im Studiengang “Produktion & Logistik”
Sommersemester 2025**

Hinweise:

- **Die Klausur besteht aus sechs** Aufgaben, die **alle** von Ihnen zu bearbeiten sind. Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angegeben.
- Als Hilfsmittel ist für diesen Klausurteil ein nicht alpha-numerisch programmierbarer Taschenrechner zulässig.
- **Der Lösungsweg muss erkennbar sein!** Wenn Sie zur Beantwortung einer Frage eine Formel verwenden, so geben Sie diese zunächst in allgemeiner Form an!
- Geben Sie bei Ihren Berechnungen **stets die Einheiten** der verwendeten Größen an!
- Zur Beantwortung der Fragen finden Sie genügend Platz in der Klausur. Bitte reißen Sie die Klausur nicht auseinander und verwenden Sie kein eigenes Papier.
- **Tabellenwerke** finden Sie im **Anhang der Klausur**.
- Tragen Sie bitte zuerst Ihre persönlichen Daten ein.

Persönliche Daten:

Nachname	Vorname	Matrikelnr.	Semester

Bewertung der Klausur:

Aufg.	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							

1. **Einmalige Bestellvorgänge - Zeitungsjungenproblem** (10 P.)

Betrachtet wird die Bestellung eines verderblichen Gutes. Der Kostensatz für Fehlmengen sei $c_u = 2$ Geldeinheiten, der für Restmengen betrage $c_o = 2$ Geldeinheiten. Angestrebt wird die Minimierung der Summe aus Kosten für Fehlmengen sowie für Restmengen. (Erforderliche Tabellenwerke finden Sie im Anhang.)

- a) Unterstellen Sie, die Nachfrage folge einer Normalverteilung. Der Erwartungswert der zufälligen Nachfrage D sei $\mu_D = 100$ Mengeneinheiten (ME) und die Standardabweichung betrage $\sigma_D = 10$ ME.
- i. Welche Bestellmenge führt in diesem Fall zum Kostenminimum? (3 P.)

ii. Wie groß sind bei einer Bestellmenge q von 80 Mengeneinheiten der sich einstellende α -Servicegrad, der Erwartungswert der Fehlmenge $E[F(q)]$ und der β -Servicegrad? (6 P.)

b) Unterstellen Sie nun, die Standardabweichung der Nachfrage betrage $\sigma_D = 0$ Mengeneinheiten. Der Erwartungswert der Nachfrage D sei weiterhin $\mu_D = 100$ ME. Welche Bestellmenge führt in diesem Fall zum Kostenminimum? Wie groß ist dieses Kostenminimum? (1 P.)

2. Produktionsprogrammplanung mit Kapazitätsreservierung (10 P.)

Gegeben sei Ihnen die folgende Notation des Modells zur Produktionsprogrammplanung mit Kapazitätsreservierung bei unsicherer Nachfrage:

Symbol	Bedeutung
Indizes und Indextmengen	
$i \in \mathcal{I}$	Produkte, $\mathcal{I} = \{1, \dots, I\}$
$j \in \mathcal{J}$	Ressourcen, $\mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$
$s \in \mathcal{S}$	Szenarien, $\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$
Parameter	
a_{ij}	Ressourcenverbrauch je Einheit von Produkt i auf Ressource j
c_j	reguläre Periodenkapazität von Ressource j
c_j^z	zusätzliche Periodenkapazität von Ressource j
d_{is}	Absatzobergrenze von Produkt i in Szenario s
e_i	Erlös je Einheit von Produkt i
p_s	Eintrittswahrscheinlichkeit von Szenario s
k_i^v	variable Herstellkosten je Einheit von Produkt i
k_j^z	Kosten der Kapazitätsreservierung für Ressource j
Entscheidungsvariablen	
$X_{is} \geq 0$	Produktions- und Absatzmenge von Produkt i in Szenario s
$Y_j \in \{0, 1\}$	gleich 1, falls Zusatzkapazität für Ressource j genutzt wird, sonst 0

Unter Verwendung dieser Notation lautet das in der Vorlesung behandelte Modell folgendermaßen:

$$\text{Max. } Z = \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^I p_s (e_i - k_i^v) \cdot X_{is} - \sum_{j=1}^J k_j^z \cdot Y_j \quad (1)$$

u. B. d. R.

$$X_{is} \leq d_{is}, \quad i \in \mathcal{I}, s \in \mathcal{S} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^I a_{ij} \cdot X_{is} \leq c_j + c_j^z \cdot Y_j, \quad j \in \mathcal{J}, s \in \mathcal{S} \quad (3)$$

a) Erläutern Sie, inwiefern in diesem Modell zwei verschiedene Entscheidungsstufen vorliegen und in welchem zeitlichen und inhaltlichen Zusammenhang diese zueinander stehen! (2 P.)

b) Welche Risikoeinstellung wird in Modell zum Ausdruck gebracht? Woran können Sie das erkennen? (2 P.)

- c) Stellen Sie sich vor, dass Ihnen eine gute Fee erschienen ist und Ihnen genau gesagt hat, wie die zukünftige Welt aussehen wird, somit die Unsicherheit aus Ihrer Problemstellung verschwunden ist. Können Sie dann das Modell weiterhin für eine rationale Entscheidung nutzen? Falls ja, wie, falls nein, warum nicht? (2 P.)

- d) Stellen Sie sich vor, dass das betrachtete Unternehmen gerade einen Liquiditätsengpass hat und für Kapazitätsreservierungen lediglich ein finanzielles Budget B zur Verfügung steht. Erweitern Sie das Modell um eine Restriktion, welche diese Anforderung an den Plan berücksichtigt! (2 P.)

- e) Stellen Sie sich vor, dass die Kapazitätserweiterung für die Ressource 5 nur möglich ist, wenn auch die Kapazitätserweiterung für die Ressource 3 erfolgt. Erweitern Sie das Modell um eine Restriktion, welche diese Anforderung an den Plan berücksichtigt! (2 P.)

3. Projektplanung im Vorgangsknotennetzplan (10 P.):

Ein gegebenes Projekt kann in sechs einzelne Vorgänge unterteilt werden. Für jeden Vorgang i wurde bereits die geschätzte Dauer d_i ermittelt. Außerdem wurde für jeden Vorgang i die Menge derjenigen Vorgänge V_i bestimmt, die als unmittelbare Vorgänger von Vorgang i abgeschlossen sein müssen, bevor mit Vorgang i begonnen werden kann:

i	d_i	V_i
1	20	-
2	30	{3}
3	50	{1}
4	40	{2}
5	30	{2, 3}
6	10	{4, 5}

Auf der nächsten Seite finden Sie eine Vorlage, in der die einzelnen Knoten des Netzplans schon vorgegeben sind. Übertragen Sie in die Vorlage die Informationen zu den Vorgangsdauern d_i und Vorgängerbeziehungen V_i aus der Tabelle und bestimmen Sie für alle Vorgänge i die frühesten Anfangszeitpunkte FA_i , die frühesten Endzeitpunkte FE_i , die spätesten Anfangszeitpunkte SA_i und die spätesten Endzeitpunkte SE_i . Ermitteln Sie daraus

- die Gesamtpuffer GP_i ,
- die Gesamtdauer des Projektes und
- dessen kritischen Pfad.

Unterstellen Sie dabei, dass das Projekt zum Zeitpunkt Null beginnt.

$i = 1$	$d_j =$
$FA_j =$	$FE_j =$
$SA_j =$	$SE_j =$

$i = 2$	$d_j =$
$FA_j =$	$FE_j =$
$SA_j =$	$SE_j =$

$i = 4$	$d_j =$
$FA_j =$	$FE_j =$
$SA_j =$	$SE_j =$

$i = 6$	$d_j =$
$FA_j =$	$FE_j =$
$SA_j =$	$SE_j =$

$i = 3$	$d_j =$
$FA_j =$	$FE_j =$
$SA_j =$	$SE_j =$

$i = 5$	$d_j =$
$FA_j =$	$FE_j =$
$SA_j =$	$SE_j =$

4. Entscheidungsmodelle und Algorithmen

(8 P.)

- a) Erläutern Sie die fünf verschiedenen Komponenten von Entscheidungsmodellen! (5 P.)

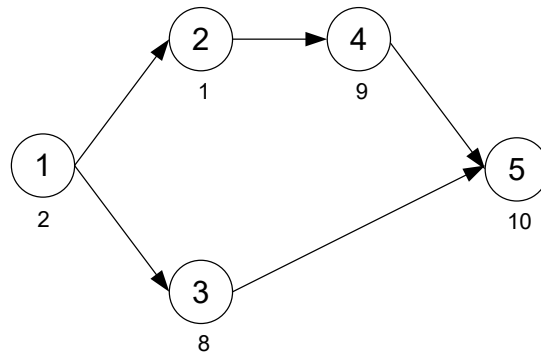
b) Wozu formuliert man mathematische Entscheidungsmodelle? (1 P.)

c) Worin besteht der Unterschied zwischen einem abstrakten Modell und einer konkreten Modellinstanz? (2 P.)

5. Fließbandabstimmung

(10 P.)

Betrachten Sie den folgenden Vorranggraphen. Unter jedem Arbeitselement i finden Sie die erforderlichen Bearbeitungszeiten t_i in Zeiteinheiten [ZE].



- a) Geben Sie die minimal mögliche und die maximal sinnvolle Taktzeit an und begründen Sie diese jeweils! (2 P.)

- b) Ermitteln Sie die Prioritätswerte $P_i = t_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} P_j$ der Arbeitselemente i mit \mathcal{N}_i als Menge der auf Arbeitselement i im Vorranggraphen direkt nachfolgenden Arbeitselemente. (2,5 P.)

i	P_i

6. Standortplanung, Modellierung (12 P.):

Betrachten Sie die folgende Notationstabelle und darunter das aus der Vorlesung bekannte Entscheidungsmodell zur kostenorientierten Standortplanung:

Symbol	Bedeutung
Indizes	
$i = 1, \dots, I$	potentielle Standorte
$j = 1, \dots, J$	Nachfragezentren
Parameter	
a_i	Kapazität des potentiellen Standorts i
b_j	Bedarf am Nachfragezentrum j
c_{ij}	Kostensatz je Mengeneinheit für Transporte vom potentiellen Standort i zum Nachfragezentrum j
f_i	fixe Kosten des potentiellen Standorts i
Entscheidungsvariablen	
$X_{ij} \geq 0$	Transportmenge von i nach j
$Y_i \in \{0, 1\}$	gleich 1, wenn Standort i eingerichtet wird, sonst 0

$$\text{Minimiere } Z = \sum_{i=1}^I f_i \cdot Y_i + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_{ij} \cdot X_{ij} \quad (4)$$

u. B. d. R.

$$\sum_{j=1}^J X_{ij} \leq a_i \cdot Y_i, \quad i = 1, \dots, I \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^I X_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (6)$$

Beantworten Sie dazu die folgenden Fragen:

- a) Stellen Sie sich vor, Sie würden aus dem Modell (4) - (6) das Restriktionensystem (6) entfernen und das dann verbleibende Modell (4) - (5) für eine konkrete Instanz lösen. Wie sähe dann die optimale Lösung des Modells aus? Warum wäre das so? (2 P.)

- b) Geben Sie ein System von bezüglich der Entscheidungsvariablen linearen Restriktionen an, durch welches Sie erzwingen können, dass die beiden potentiellen Standorte 2 und 3 entweder beide gemeinsam geöffnet werden oder aber beide gemeinsam nicht geöffnet werden! (2 P.)

- c) Betrachten Sie nun die folgende Instanz mit den Nachfragen b_j gemäß Tabelle 1 und den Kapazitäten a_i gemäß Tabelle 2. Alle Transportkostensätze seien $c_{ij} = 1$ und alle fixen Kosten der Standorte seien $f_i = 1000$.

Tabelle 1: Nachfrage b_j an den Nachfragezentren j

j	1	2	3	4
b_j	50	100	80	70

Tabelle 2: Kapazität a_i an den potentiellen Standorten i

i	1	2	3
a_i	200	180	150

Geben Sie für diese konkrete Instanz die Restriktionen gemäß Formel (5) des Entscheidungsmodells der Standortplanung für den Standort $i = 1$ an! (2 P.)

- d) Gehen Sie nun in Ergänzung zu den Annahmen des Modells davon aus, dass bei strikt positiven Transportmengen, also im Fall $X_{ij} > 0$, zusätzlich zu den transportmengenproportionalen Kosten weitere transportmengenfixe Kosten in Höhe von g_{ij} anfallen. Es sei eine zusätzliche Binärvariable Z_{ij} gleich 1, falls die Transportrelation von i nach j mit einer strikt positiven Transportmenge genutzt wird, und 0 sonst.

Nehmen Sie an dem oben angegebenen abstrakten Modell die dazu erforderlichen Modifikationen vor und geben Sie die Zielfunktion und alle Restriktionen inklusive der jeweiligen Definitionsbereiche an. (6 P.)

Anhang

1 Tabellenwerte der Standardnormalverteilung

Es sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, es sei also ihr Erwartungswert $\mu = 0$ und ihre Standardabweichung $\sigma = 1$. Die folgende Tabelle enthält für $-3 \leq x \leq 3$ die korrespondierenden Werte der Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

x	$F_X(x)$								
-3,00	0,001350	-2,23	0,012874	-1,46	0,072145	-0,69	0,245097	0,08	0,531881
-2,99	0,001395	-2,22	0,013209	-1,45	0,073529	-0,68	0,248252	0,09	0,535856
-2,98	0,001441	-2,21	0,013553	-1,44	0,074934	-0,67	0,251429	0,10	0,539828
-2,97	0,001489	-2,20	0,013903	-1,43	0,076359	-0,66	0,254627	0,11	0,543795
-2,96	0,001538	-2,19	0,014262	-1,42	0,077804	-0,65	0,257846	0,12	0,547758
-2,95	0,001589	-2,18	0,014629	-1,41	0,079270	-0,64	0,261086	0,13	0,551717
-2,94	0,001641	-2,17	0,015003	-1,40	0,080757	-0,63	0,264347	0,14	0,555670
-2,93	0,001695	-2,16	0,015386	-1,39	0,082264	-0,62	0,267629	0,15	0,559618
-2,92	0,001750	-2,15	0,015778	-1,38	0,083793	-0,61	0,270931	0,16	0,563559
-2,91	0,001807	-2,14	0,016177	-1,37	0,085343	-0,60	0,274253	0,17	0,567495
-2,90	0,001866	-2,13	0,016586	-1,36	0,086915	-0,59	0,277595	0,18	0,571424
-2,89	0,001926	-2,12	0,017003	-1,35	0,088508	-0,58	0,280957	0,19	0,575345
-2,88	0,001988	-2,11	0,017429	-1,34	0,090123	-0,57	0,284339	0,20	0,579260
-2,87	0,002052	-2,10	0,017864	-1,33	0,091759	-0,56	0,287740	0,21	0,583166
-2,86	0,002118	-2,09	0,018309	-1,32	0,093418	-0,55	0,291160	0,22	0,587064
-2,85	0,002186	-2,08	0,018763	-1,31	0,095098	-0,54	0,294599	0,23	0,590954
-2,84	0,002256	-2,07	0,019226	-1,30	0,096800	-0,53	0,298056	0,24	0,594835
-2,83	0,002327	-2,06	0,019699	-1,29	0,098525	-0,52	0,301532	0,25	0,598706
-2,82	0,002401	-2,05	0,020182	-1,28	0,100273	-0,51	0,305026	0,26	0,602568
-2,81	0,002477	-2,04	0,020675	-1,27	0,102042	-0,50	0,308538	0,27	0,606420
-2,80	0,002555	-2,03	0,021178	-1,26	0,103835	-0,49	0,312067	0,28	0,610261
-2,79	0,002635	-2,02	0,021692	-1,25	0,105650	-0,48	0,315614	0,29	0,614092
-2,78	0,002718	-2,01	0,022216	-1,24	0,107488	-0,47	0,319178	0,30	0,617911
-2,77	0,002803	-2,00	0,022750	-1,23	0,109349	-0,46	0,322758	0,31	0,621720
-2,76	0,002890	-1,99	0,023295	-1,22	0,111232	-0,45	0,326355	0,32	0,625516
-2,75	0,002980	-1,98	0,023852	-1,21	0,113139	-0,44	0,329969	0,33	0,629300
-2,74	0,003072	-1,97	0,024419	-1,20	0,115070	-0,43	0,333598	0,34	0,633072
-2,73	0,003167	-1,96	0,024998	-1,19	0,117023	-0,42	0,337243	0,35	0,636831
-2,72	0,003264	-1,95	0,025588	-1,18	0,119000	-0,41	0,340903	0,36	0,640576
-2,71	0,003364	-1,94	0,026190	-1,17	0,121000	-0,40	0,344578	0,37	0,644309
-2,70	0,003467	-1,93	0,026803	-1,16	0,123024	-0,39	0,348268	0,38	0,648027
-2,69	0,003573	-1,92	0,027429	-1,15	0,125072	-0,38	0,351973	0,39	0,651732
-2,68	0,003681	-1,91	0,028067	-1,14	0,127143	-0,37	0,355691	0,40	0,655422
-2,67	0,003793	-1,90	0,028717	-1,13	0,129238	-0,36	0,359424	0,41	0,659097
-2,66	0,003907	-1,89	0,029379	-1,12	0,131357	-0,35	0,363169	0,42	0,662757
-2,65	0,004025	-1,88	0,030054	-1,11	0,133500	-0,34	0,366928	0,43	0,666402
-2,64	0,004145	-1,87	0,030742	-1,10	0,135666	-0,33	0,370700	0,44	0,670031
-2,63	0,004269	-1,86	0,031443	-1,09	0,137857	-0,32	0,374484	0,45	0,673645
-2,62	0,004396	-1,85	0,032157	-1,08	0,140071	-0,31	0,378280	0,46	0,677242
-2,61	0,004527	-1,84	0,032884	-1,07	0,142310	-0,30	0,382089	0,47	0,680822
-2,60	0,004661	-1,83	0,033625	-1,06	0,144572	-0,29	0,385908	0,48	0,684386
-2,59	0,004799	-1,82	0,034380	-1,05	0,146859	-0,28	0,389739	0,49	0,687933
-2,58	0,004940	-1,81	0,035148	-1,04	0,149170	-0,27	0,393580	0,50	0,691462
-2,57	0,005085	-1,80	0,035930	-1,03	0,151505	-0,26	0,397432	0,51	0,694974
-2,56	0,005234	-1,79	0,036727	-1,02	0,153864	-0,25	0,401294	0,52	0,698468
-2,55	0,005386	-1,78	0,037538	-1,01	0,156248	-0,24	0,405165	0,53	0,701944
-2,54	0,005543	-1,77	0,038364	-1,00	0,158655	-0,23	0,409046	0,54	0,705401
-2,53	0,005703	-1,76	0,039204	-0,99	0,161087	-0,22	0,412936	0,55	0,708840
-2,52	0,005868	-1,75	0,040059	-0,98	0,163543	-0,21	0,416834	0,56	0,712260
-2,51	0,006037	-1,74	0,040930	-0,97	0,166023	-0,20	0,420740	0,57	0,715661
-2,50	0,006210	-1,73	0,041815	-0,96	0,168528	-0,19	0,424655	0,58	0,719043
-2,49	0,006387	-1,72	0,042716	-0,95	0,171056	-0,18	0,428576	0,59	0,722405
-2,48	0,006569	-1,71	0,043633	-0,94	0,173609	-0,17	0,432505	0,60	0,725747
-2,47	0,006756	-1,70	0,044565	-0,93	0,176186	-0,16	0,436441	0,61	0,729069
-2,46	0,006947	-1,69	0,045514	-0,92	0,178786	-0,15	0,440382	0,62	0,732371
-2,45	0,007143	-1,68	0,046479	-0,91	0,181411	-0,14	0,444330	0,63	0,735653
-2,44	0,007344	-1,67	0,047460	-0,90	0,184060	-0,13	0,448283	0,64	0,738914
-2,43	0,007549	-1,66	0,048457	-0,89	0,186733	-0,12	0,452242	0,65	0,742154
-2,42	0,007760	-1,65	0,049471	-0,88	0,189430	-0,11	0,456205	0,66	0,745373
-2,41	0,007976	-1,64	0,050503	-0,87	0,192150	-0,10	0,460172	0,67	0,748571
-2,40	0,008198	-1,63	0,051551	-0,86	0,194895	-0,09	0,464144	0,68	0,751748
-2,39	0,008424	-1,62	0,052616	-0,85	0,197663	-0,08	0,468119	0,69	0,754903
-2,38	0,008656	-1,61	0,053699	-0,84	0,200454	-0,07	0,472097	0,70	0,758036
-2,37	0,008894	-1,60	0,054799	-0,83	0,203269	-0,06	0,476078	0,71	0,761148
-2,36	0,009137	-1,59	0,055917	-0,82	0,206108	-0,05	0,480061	0,72	0,764238
-2,35	0,009387	-1,58	0,057053	-0,81	0,208970	-0,04	0,484047	0,73	0,767305
-2,34	0,009642	-1,57	0,058208	-0,80	0,211855	-0,03	0,488034	0,74	0,770350
-2,33	0,009903	-1,56	0,059380	-0,79	0,214764	-0,02	0,492022	0,75	0,773373
-2,32	0,010170	-1,55	0,060571	-0,78	0,217695	-0,01	0,496011	0,76	0,776373
-2,31	0,010444	-1,54	0,061780	-0,77	0,220650	0,00	0,500000	0,77	0,779350
-2,30	0,010724	-1,53	0,063008	-0,76	0,223627	0,01	0,503989	0,78	0,782305
-2,29	0,011011	-1,52	0,064255	-0,75	0,226627	0,02	0,507978	0,79	0,785236
-2,28	0,011304	-1,51	0,065522	-0,74	0,229650	0,03	0,511965	0,80	0,788145
-2,27	0,011604	-1,50	0,066807	-0,73	0,232695	0,04	0,515953	0,81	0,791030
-2,26	0,011911	-1,49	0,068112	-0,72	0,235762	0,05	0,519939	0,82	0,793892
-2,25	0,012224	-1,48	0,069437	-0,71	0,238852	0,06	0,523922	0,83	0,796731
-2,24	0,012545	-1,47	0,070781	-0,70	0,241964	0,07	0,527903	0,84	0,799546

0,85	0,802337	1,29	0,901475	1,73	0,958185	2,17	0,984997	2,61	0,995473
0,86	0,805105	1,30	0,903200	1,74	0,959070	2,18	0,985371	2,62	0,995604
0,87	0,807850	1,31	0,904902	1,75	0,959941	2,19	0,985738	2,63	0,995731
0,88	0,810570	1,32	0,906582	1,76	0,960796	2,20	0,986097	2,64	0,995855
0,89	0,813267	1,33	0,908241	1,77	0,961636	2,21	0,986447	2,65	0,995975
0,90	0,815940	1,34	0,909877	1,78	0,962462	2,22	0,986791	2,66	0,996093
0,91	0,818589	1,35	0,911492	1,79	0,963273	2,23	0,987126	2,67	0,996207
0,92	0,821214	1,36	0,913085	1,80	0,964070	2,24	0,987455	2,68	0,996319
0,93	0,823814	1,37	0,914657	1,81	0,964852	2,25	0,987776	2,69	0,996427
0,94	0,826391	1,38	0,916207	1,82	0,965620	2,26	0,988089	2,70	0,996533
0,95	0,828944	1,39	0,917736	1,83	0,966375	2,27	0,988396	2,71	0,996636
0,96	0,831472	1,40	0,919243	1,84	0,967116	2,28	0,988696	2,72	0,996736
0,97	0,833977	1,41	0,920730	1,85	0,967843	2,29	0,988989	2,73	0,996833
0,98	0,836457	1,42	0,922196	1,86	0,968557	2,30	0,989276	2,74	0,996928
0,99	0,838913	1,43	0,923641	1,87	0,969258	2,31	0,989556	2,75	0,997020
1,00	0,841345	1,44	0,925066	1,88	0,969946	2,32	0,989830	2,76	0,997110
1,01	0,843752	1,45	0,926471	1,89	0,970621	2,33	0,990097	2,77	0,997197
1,02	0,846136	1,46	0,927855	1,90	0,971283	2,34	0,990358	2,78	0,997282
1,03	0,848495	1,47	0,929219	1,91	0,971933	2,35	0,990613	2,79	0,997365
1,04	0,850830	1,48	0,930563	1,92	0,972571	2,36	0,990863	2,80	0,997445
1,05	0,853141	1,49	0,931888	1,93	0,973197	2,37	0,991106	2,81	0,997523
1,06	0,855428	1,50	0,933193	1,94	0,973810	2,38	0,991344	2,82	0,997599
1,07	0,857690	1,51	0,934478	1,95	0,974412	2,39	0,991576	2,83	0,997673
1,08	0,859929	1,52	0,935745	1,96	0,975002	2,40	0,991802	2,84	0,997744
1,09	0,862143	1,53	0,936992	1,97	0,975581	2,41	0,992024	2,85	0,997814
1,10	0,864334	1,54	0,938220	1,98	0,976148	2,42	0,992240	2,86	0,997882
1,11	0,866500	1,55	0,939429	1,99	0,976705	2,43	0,992451	2,87	0,997948
1,12	0,868643	1,56	0,940620	2,00	0,977250	2,44	0,992656	2,88	0,998012
1,13	0,870762	1,57	0,941792	2,01	0,977784	2,45	0,992857	2,89	0,998074
1,14	0,872857	1,58	0,942947	2,02	0,978308	2,46	0,993053	2,90	0,998134
1,15	0,874928	1,59	0,944083	2,03	0,978822	2,47	0,993244	2,91	0,998193
1,16	0,876976	1,60	0,945201	2,04	0,979325	2,48	0,993431	2,92	0,998250
1,17	0,879000	1,61	0,946301	2,05	0,979818	2,49	0,993613	2,93	0,998305
1,18	0,881000	1,62	0,947384	2,06	0,980301	2,50	0,993790	2,94	0,998359
1,19	0,882977	1,63	0,948449	2,07	0,980774	2,51	0,993963	2,95	0,998411
1,20	0,884930	1,64	0,949497	2,08	0,981237	2,52	0,994132	2,96	0,998462
1,21	0,886861	1,65	0,950529	2,09	0,981691	2,53	0,994297	2,97	0,998511
1,22	0,888768	1,66	0,951543	2,10	0,982136	2,54	0,994457	2,98	0,998559
1,23	0,890651	1,67	0,952540	2,11	0,982571	2,55	0,994614	2,99	0,998605
1,24	0,892512	1,68	0,953521	2,12	0,982997	2,56	0,994766	3,00	0,998650
1,25	0,894350	1,69	0,954486	2,13	0,983414	2,57	0,994915		
1,26	0,896165	1,70	0,955435	2,14	0,983823	2,58	0,995060		
1,27	0,897958	1,71	0,956367	2,15	0,984222	2,59	0,995201		
1,28	0,899727	1,72	0,957284	2,16	0,984614	2,60	0,995339		

2 Standardisierte Fehlmengenerwartungswerte

Es sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, folglich gilt für ihre Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (7)$$

Man kann nun die Frage stellen, wie groß der Erwartungswert jenes Betrages ist, um den die standardnormalverteilte Zufallsvariable X einen vorgegebenen Wert v überschreitet, und dafür das Symbol $\Phi^1(v)$ definieren:

$$\begin{aligned} \Phi^1(v) &= E[\max(0, X - v)] \\ &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \max(0, x - v) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{x=v}^{x=\infty} (x - v) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned} \quad (8)$$

Diese Größe wird als *standardisierter Fehlmengenerwartungswert* oder auch als *Verlustfunktion erster Ordnung* bezeichnet, weil man mit ihr abbilden kann, um wie viel eine zufällige standardnormalverteilte Nachfrage X einen vorhandenen Bestand oder eine beschaffte Menge v im Mittel überschreitet.

Die folgende Tabelle enthält für $-3 \leq v \leq 3$ die korrespondierenden standardisierten Fehlmengenerwartungswerte $\Phi^1(v)$.

v	$\Phi^1(v)$								
-3,00	3,000382	-2,50	2,502004	-2,00	2,008491	-1,50	1,529307	-1,00	1,083315
-2,99	2,990396	-2,49	2,492067	-1,99	1,998721	-1,49	1,519981	-0,99	1,074914
-2,98	2,980410	-2,48	2,482132	-1,98	1,988957	-1,48	1,510669	-0,98	1,066537
-2,97	2,970425	-2,47	2,472199	-1,97	1,979198	-1,47	1,501370	-0,97	1,058185
-2,96	2,960440	-2,46	2,462267	-1,96	1,969445	-1,46	1,492085	-0,96	1,049858
-2,95	2,950455	-2,45	2,452337	-1,95	1,959698	-1,45	1,482813	-0,95	1,041556
-2,94	2,940472	-2,44	2,442410	-1,94	1,949957	-1,44	1,473555	-0,94	1,033279
-2,93	2,930488	-2,43	2,432484	-1,93	1,940222	-1,43	1,464312	-0,93	1,025028
-2,92	2,920506	-2,42	2,422561	-1,92	1,930493	-1,42	1,455083	-0,92	1,016803
-2,91	2,910523	-2,41	2,412640	-1,91	1,920770	-1,41	1,445868	-0,91	1,008604
-2,90	2,900542	-2,40	2,402720	-1,90	1,911054	-1,40	1,436668	-0,90	1,000431
-2,89	2,890561	-2,39	2,392804	-1,89	1,901345	-1,39	1,427483	-0,89	0,992285
-2,88	2,880580	-2,38	2,382889	-1,88	1,891642	-1,38	1,418314	-0,88	0,984166
-2,87	2,870600	-2,37	2,372977	-1,87	1,881946	-1,37	1,409159	-0,87	0,976074
-2,86	2,860621	-2,36	2,363067	-1,86	1,872257	-1,36	1,400020	-0,86	0,968009
-2,85	2,850643	-2,35	2,353159	-1,85	1,862575	-1,35	1,390898	-0,85	0,959972
-2,84	2,840665	-2,34	2,343255	-1,84	1,852900	-1,34	1,381791	-0,84	0,951962
-2,83	2,830688	-2,33	2,333352	-1,83	1,843233	-1,33	1,372700	-0,83	0,943981
-2,82	2,820712	-2,32	2,323453	-1,82	1,833573	-1,32	1,363626	-0,82	0,936028
-2,81	2,810736	-2,31	2,313556	-1,81	1,823920	-1,31	1,354568	-0,81	0,928103
-2,80	2,800761	-2,30	2,303662	-1,80	1,814276	-1,30	1,345528	-0,80	0,920207
-2,79	2,790787	-2,29	2,293770	-1,79	1,804639	-1,29	1,336505	-0,79	0,912340
-2,78	2,780814	-2,28	2,283882	-1,78	1,795010	-1,28	1,327499	-0,78	0,904503
-2,77	2,770841	-2,27	2,273996	-1,77	1,785390	-1,27	1,318510	-0,77	0,896694
-2,76	2,760870	-2,26	2,264114	-1,76	1,775777	-1,26	1,309539	-0,76	0,888916
-2,75	2,750899	-2,25	2,254235	-1,75	1,766174	-1,25	1,300587	-0,75	0,881167
-2,74	2,740929	-2,24	2,244358	-1,74	1,756579	-1,24	1,291653	-0,74	0,873448
-2,73	2,730961	-2,23	2,234486	-1,73	1,746992	-1,23	1,282737	-0,73	0,865760
-2,72	2,720993	-2,22	2,224616	-1,72	1,737415	-1,22	1,273840	-0,72	0,858102
-2,71	2,711026	-2,21	2,214750	-1,71	1,727847	-1,21	1,264961	-0,71	0,850475
-2,70	2,701060	-2,20	2,204887	-1,70	1,718288	-1,20	1,256102	-0,70	0,842879
-2,69	2,691095	-2,19	2,195028	-1,69	1,708738	-1,19	1,247263	-0,69	0,835315
-2,68	2,681132	-2,18	2,185172	-1,68	1,699198	-1,18	1,238443	-0,68	0,827781
-2,67	2,671169	-2,17	2,175320	-1,67	1,689668	-1,17	1,229643	-0,67	0,820280
-2,66	2,661207	-2,16	2,165472	-1,66	1,680147	-1,16	1,220863	-0,66	0,812810
-2,65	2,651247	-2,15	2,155628	-1,65	1,670637	-1,15	1,212104	-0,65	0,805372
-2,64	2,641288	-2,14	2,145788	-1,64	1,661137	-1,14	1,203365	-0,64	0,797967
-2,63	2,631330	-2,13	2,135952	-1,63	1,651647	-1,13	1,194646	-0,63	0,790594
-2,62	2,621373	-2,12	2,126120	-1,62	1,642168	-1,12	1,185949	-0,62	0,783254
-2,61	2,611418	-2,11	2,116292	-1,61	1,632699	-1,11	1,177274	-0,61	0,775947
-2,60	2,601464	-2,10	2,106468	-1,60	1,623242	-1,10	1,168620	-0,60	0,768673
-2,59	2,591511	-2,09	2,096649	-1,59	1,613796	-1,09	1,159987	-0,59	0,761432
-2,58	2,581560	-2,08	2,086835	-1,58	1,604360	-1,08	1,151377	-0,58	0,754225
-2,57	2,571610	-2,07	2,077024	-1,57	1,594937	-1,07	1,142789	-0,57	0,747051
-2,56	2,561662	-2,06	2,067219	-1,56	1,585525	-1,06	1,134223	-0,56	0,739912
-2,55	2,551715	-2,05	2,057418	-1,55	1,576124	-1,05	1,125680	-0,55	0,732806
-2,54	2,541769	-2,04	2,047623	-1,54	1,566736	-1,04	1,117160	-0,54	0,725735
-2,53	2,531826	-2,03	2,037832	-1,53	1,557360	-1,03	1,108664	-0,53	0,718698
-2,52	2,521883	-2,02	2,028046	-1,52	1,547996	-1,02	1,100190	-0,52	0,711696
-2,51	2,511943	-2,01	2,018266	-1,51	1,538645	-1,01	1,091741	-0,51	0,704729

-0,50	0,697797	0,21	0,302707	0,92	0,096803	1,63	0,021647	2,34	0,003255
-0,49	0,690900	0,22	0,298558	0,93	0,095028	1,64	0,021137	2,35	0,003159
-0,48	0,684038	0,23	0,294448	0,94	0,093279	1,65	0,020637	2,36	0,003067
-0,47	0,677212	0,24	0,290377	0,95	0,091556	1,66	0,020147	2,37	0,002977
-0,46	0,670422	0,25	0,286345	0,96	0,089858	1,67	0,019668	2,38	0,002889
-0,45	0,663667	0,26	0,282351	0,97	0,088185	1,68	0,019198	2,39	0,002804
-0,44	0,656949	0,27	0,278396	0,98	0,086537	1,69	0,018738	2,40	0,002720
-0,43	0,650267	0,28	0,274479	0,99	0,084914	1,70	0,018288	2,41	0,002640
-0,42	0,643621	0,29	0,270601	1,00	0,083315	1,71	0,017847	2,42	0,002561
-0,41	0,637011	0,30	0,266761	1,01	0,081741	1,72	0,017415	2,43	0,002484
-0,40	0,630439	0,31	0,262959	1,02	0,080190	1,73	0,016992	2,44	0,002410
-0,39	0,623903	0,32	0,259196	1,03	0,078664	1,74	0,016579	2,45	0,002337
-0,38	0,617404	0,33	0,255470	1,04	0,077160	1,75	0,016174	2,46	0,002267
-0,37	0,610943	0,34	0,251782	1,05	0,075680	1,76	0,015777	2,47	0,002199
-0,36	0,604518	0,35	0,248131	1,06	0,074223	1,77	0,015390	2,48	0,002132
-0,35	0,598131	0,36	0,244518	1,07	0,072789	1,78	0,015010	2,49	0,002067
-0,34	0,591782	0,37	0,240943	1,08	0,071377	1,79	0,014639	2,50	0,002004
-0,33	0,585470	0,38	0,237404	1,09	0,069987	1,80	0,014276	2,51	0,001943
-0,32	0,579196	0,39	0,233903	1,10	0,068620	1,81	0,013920	2,52	0,001883
-0,31	0,572959	0,40	0,230439	1,11	0,067274	1,82	0,013573	2,53	0,001826
-0,30	0,566761	0,41	0,227011	1,12	0,065949	1,83	0,013233	2,54	0,001769
-0,29	0,560601	0,42	0,223621	1,13	0,064646	1,84	0,012900	2,55	0,001715
-0,28	0,554479	0,43	0,220267	1,14	0,063365	1,85	0,012575	2,56	0,001662
-0,27	0,548396	0,44	0,216949	1,15	0,062104	1,86	0,012257	2,57	0,001610
-0,26	0,542351	0,45	0,213667	1,16	0,060863	1,87	0,011946	2,58	0,001560
-0,25	0,536345	0,46	0,210422	1,17	0,059643	1,88	0,011642	2,59	0,001511
-0,24	0,530377	0,47	0,207212	1,18	0,058443	1,89	0,011345	2,60	0,001464
-0,23	0,524448	0,48	0,204038	1,19	0,057263	1,90	0,011054	2,61	0,001418
-0,22	0,518558	0,49	0,200900	1,20	0,056102	1,91	0,010770	2,62	0,001373
-0,21	0,512707	0,50	0,197797	1,21	0,054961	1,92	0,010493	2,63	0,001330
-0,20	0,506895	0,51	0,194729	1,22	0,053840	1,93	0,010222	2,64	0,001288
-0,19	0,501122	0,52	0,191696	1,23	0,052737	1,94	0,009957	2,65	0,001247
-0,18	0,495388	0,53	0,188698	1,24	0,051653	1,95	0,009698	2,66	0,001207
-0,17	0,489693	0,54	0,185735	1,25	0,050587	1,96	0,009445	2,67	0,001169
-0,16	0,484038	0,55	0,182806	1,26	0,049539	1,97	0,009198	2,68	0,001132
-0,15	0,478422	0,56	0,179912	1,27	0,048510	1,98	0,008957	2,69	0,001095
-0,14	0,472846	0,57	0,177051	1,28	0,047499	1,99	0,008721	2,70	0,001060
-0,13	0,467309	0,58	0,174225	1,29	0,046505	2,00	0,008491	2,71	0,001026
-0,12	0,461811	0,59	0,171432	1,30	0,045528	2,01	0,008266	2,72	0,000993
-0,11	0,456353	0,60	0,168673	1,31	0,044568	2,02	0,008046	2,73	0,000961
-0,10	0,450935	0,61	0,165947	1,32	0,043626	2,03	0,007832	2,74	0,000929
-0,09	0,445557	0,62	0,163254	1,33	0,042700	2,04	0,007623	2,75	0,000899
-0,08	0,440218	0,63	0,160594	1,34	0,041791	2,05	0,007418	2,76	0,000870
-0,07	0,434919	0,64	0,157967	1,35	0,040898	2,06	0,007219	2,77	0,000841
-0,06	0,429660	0,65	0,155372	1,36	0,040020	2,07	0,007024	2,78	0,000814
-0,05	0,424441	0,66	0,152810	1,37	0,039159	2,08	0,006835	2,79	0,000787
-0,04	0,419261	0,67	0,150280	1,38	0,038314	2,09	0,006649	2,80	0,000761
-0,03	0,414122	0,68	0,147781	1,39	0,037483	2,10	0,006468	2,81	0,000736
-0,02	0,409022	0,69	0,145315	1,40	0,036668	2,11	0,006292	2,82	0,000712
-0,01	0,403962	0,70	0,142879	1,41	0,035868	2,12	0,006120	2,83	0,000688
0,00	0,398942	0,71	0,140475	1,42	0,035083	2,13	0,005952	2,84	0,000665
0,01	0,393962	0,72	0,138102	1,43	0,034312	2,14	0,005788	2,85	0,000643
0,02	0,389022	0,73	0,135760	1,44	0,033555	2,15	0,005628	2,86	0,000621
0,03	0,384122	0,74	0,133448	1,45	0,032813	2,16	0,005472	2,87	0,000600
0,04	0,379261	0,75	0,131167	1,46	0,032085	2,17	0,005320	2,88	0,000580
0,05	0,374441	0,76	0,128916	1,47	0,031370	2,18	0,005172	2,89	0,000561
0,06	0,369660	0,77	0,126694	1,48	0,030669	2,19	0,005028	2,90	0,000542
0,07	0,364919	0,78	0,124503	1,49	0,029981	2,20	0,004887	2,91	0,000523
0,08	0,360218	0,79	0,122340	1,50	0,029307	2,21	0,004750	2,92	0,000506
0,09	0,355557	0,80	0,120207	1,51	0,028645	2,22	0,004616	2,93	0,000488
0,10	0,350935	0,81	0,118103	1,52	0,027996	2,23	0,004486	2,94	0,000472
0,11	0,346353	0,82	0,116028	1,53	0,027360	2,24	0,004358	2,95	0,000455
0,12	0,341811	0,83	0,113981	1,54	0,026736	2,25	0,004235	2,96	0,000440
0,13	0,337309	0,84	0,111962	1,55	0,026124	2,26	0,004114	2,97	0,000425
0,14	0,332846	0,85	0,109972	1,56	0,025525	2,27	0,003996	2,98	0,000410
0,15	0,328422	0,86	0,108009	1,57	0,024937	2,28	0,003882	2,99	0,000396
0,16	0,324038	0,87	0,106074	1,58	0,024360	2,29	0,003770	3,00	0,000382
0,17	0,319693	0,88	0,104166	1,59	0,023796	2,30	0,003662		
0,18	0,315388	0,89	0,102285	1,60	0,023242	2,31	0,003556		
0,19	0,311122	0,90	0,100431	1,61	0,022699	2,32	0,003453		
0,20	0,306895	0,91	0,098604	1,62	0,022168	2,33	0,003352		