

Leibniz Universität Hannover  
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät  
Institut für Produktionswirtschaft  
Prof. Dr. Stefan Helber

**Klausur “Operations- und Logistikmanagement”**  
**im Studiengang “Produktion & Logistik”**  
Sommersemester 2022

**Hinweise:**

- **Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben, die alle von Ihnen zu bearbeiten sind.**  
Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angegeben.
- Als Hilfsmittel ist für diesen Klausurteil ein nicht alpha-numerisch programmierbarer Taschenrechner zulässig.
- **Der Lösungsweg muss erkennbar sein!** Wenn Sie zur Beantwortung einer Frage eine Formel verwenden, so geben Sie diese zunächst in allgemeiner Form an!
- Geben Sie bei Ihren Berechnungen **stets die Einheiten** der verwendeten Größen an!
- Zur Beantwortung der Fragen finden Sie genügend Platz in der Klausur. Bitte reißen Sie die Klausur nicht auseinander und verwenden Sie kein eigenes Papier.
- **Tabellenwerke** finden Sie im **Anhang der Klausur**.
- Tragen Sie bitte zuerst Ihre persönlichen Daten ein.

**Persönliche Daten:**

Nachname	Vorname	Matrikelnr.	Semester

---

**Bewertung der Klausur:**

Aufg.	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte							

### 1. Prozessanalyse (10 P.)

Zur Analyse eines Bediensystems mit einem Server liegen Ihnen die folgenden Informationen vor:

- Für den Erwartungswert der Zwischenankunftszeit gilt  $E[T_a] = 10$  ZE.
- Für den Erwartungswert der Servicezeit gilt  $E[T_s] = 8$  ZE.
- Der quadrierte Variationskoeffizient der Zwischenankunftszeiten ist  $c_a^2 = 0,7$ , jener der Servicezeiten beträgt  $c_s^2 = 0,3$ .

Führen Sie die Analyse entlang der folgenden Fragen durch und **geben Sie in jeder Rechnung zunächst die generelle Berechnungsformel an!**

a) Wie groß ist die Ankunftsrate  $\lambda$  ? (1 P.)

b) Wie groß ist die Bedien- oder Servicerate  $\mu$  ? (1 P.)

c) Wie groß ist die Auslastung  $\rho$  ? (1 P.)

- d) Wie groß ist der Erwartungswert der Durchlaufzeit  $E[W]$  durch das System?  
(2 P.)
- e) Wie groß ist der Erwartungswert des Bestandes im System  $E[L]$ ? (2 P.)
- f) Wie entwickelt sich der Erwartungswert der Durchlaufzeit  $E[W]$  durch das System, wenn Sie die Anzahl der Server gedanklich gegen Unendlich gehen lassen? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 P.)

g) Ermitteln Sie (auch hier unter Angabe der Einheiten!) die Varianz  $\text{VAR}[T_a]$  und die Standardabweichung  $\sigma_{T_a}$  der Zwischenankunftszeiten  $T_a$  ! (2 P.)

## 2. Projektplanung im Vorgangsknotennetzplan (10 P.):

Ein gegebenes Projekt kann in sechs einzelne Vorgänge unterteilt werden. Für jeden Vorgang  $i$  wurde bereits die geschätzte Dauer  $d_i$  ermittelt. Außerdem wurde für jeden Vorgang  $i$  die Menge derjenigen Vorgänge  $V_i$  bestimmt, die als unmittelbare Vorgänger von Vorgang  $i$  abgeschlossen sein müssen, bevor mit Vorgang  $i$  begonnen werden kann:

$i$	$d_i$	$V_i$
1	20	-
2	30	{3}
3	50	{1}
4	40	{2}
5	30	{2, 3}
6	10	{4, 5}

Auf der nächsten Seite finden Sie eine Vorlage, in der die einzelnen Knoten des Netzplans schon vorgegeben sind. Übertragen Sie in die Vorlage die Informationen zu den Vorgangsdauern  $d_i$  und Vorgängerbeziehungen  $V_i$  aus der Tabelle und bestimmen Sie für alle Vorgänge  $i$  die frühesten Anfangszeitpunkte  $FA_i$ , die frühesten Endzeitpunkte  $FE_i$ , die spätesten Anfangszeitpunkte  $SA_i$  und die spätesten Endzeitpunkte  $SE_i$ . Ermitteln Sie daraus

- die Gesamtpuffer  $GP_i$ ,
- die Gesamtdauer des Projektes und
- dessen kritischen Pfad.

Unterstellen Sie dabei, dass das Projekt zum Zeitpunkt Null beginnt.

$i = 2$	$d_i =$
$FA_i =$	$FE_i =$
$SA_i =$	$SE_i =$

$i = 1$	$d_i =$
$FA_i =$	$FE_i =$
$SA_i =$	$SE_i =$

$i = 4$	$d_i =$
$FA_i =$	$FE_i =$
$SA_i =$	$SE_i =$

$i = 6$	$d_i =$
$FA_i =$	$FE_i =$
$SA_i =$	$SE_i =$

$i = 5$	$d_i =$
$FA_i =$	$FE_i =$
$SA_i =$	$SE_i =$

$i = 3$	$d_i =$
$FA_i =$	$FE_i =$
$SA_i =$	$SE_i =$

### 3. Dynamische Losgrößenplanung, Modellierung (10 P.)

Im Kontext der dynamischen Losgrößenplanung ist Ihnen bereits das folgende Modellfragment begegnet:

$$\text{Minimiere } \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T (sc_k \cdot \gamma_{kt} + hc_k \cdot Y_{kt}) \quad (1)$$

u.B.d.R.

$$Y_{k,t-1} + Q_{kt} - Y_{kt} = d_{kt}, \quad \forall k, t \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^K (ts_k \cdot \gamma_{kt} + tb_k \cdot Q_{kt}) \leq c_t, \quad \forall t \quad (3)$$

$$Q_{kt} \leq \frac{c_t}{tb_k} \cdot \gamma_{kt}, \quad \forall k, t \quad (4)$$

a) Erläutern Sie, welcher Trade-off durch das Modell abgebildet wird! (2 P.)

b) Was wird durch die Zielfunktion (1) ausgedrückt? (1 P.)

c) Erläutern Sie den Definitionsbereich der Restriktion (2)! (1 P.)

- d) Was wird in der Restriktion (3) durch den Term  $\sum_{k=1}^K (ts_k \cdot \gamma_{kt} + tb_k \cdot Q_{kt})$  ausgedrückt? (1 P.)
- e) Stellen Sie sich vor, es sei möglich, je Periode bis zu  $O^{\max}$  Einheiten Zusatzkapazität an der Produktionsressource in Anspruch zu nehmen, zu Kosten von  $oc$  je Einheit. Mit  $O_t$  sei die geplante Zusatzkapazität bezeichnet. Erweitern Sie das Modell um die kostenoptimale Nutzung von Zusatzkapazität! (3 P.)
- f) Stellen Sie sich vor, dass aus produktionstechnischen Gründen nur solche Lose aufgelegt werden können, die
  - eine Mindestlosgröße  $q_k^{\min}$  nicht unterschreiten und zudem
  - eine maximale Losgröße  $q_k^{\max}$  nicht überschreiten.
Erweitern Sie das Modell um zwei Restriktionen, durch die Sie diese Anforderungen ausdrücken können! (2 P.)

**4. Entscheidungsmodelle (5 P.)**

Erläutern Sie die fünf verschiedenen Komponenten von Entscheidungsmodellen und geben Sie dabei an, auf welche Frage jede dieser Komponenten eine Antwort gibt.  
(5 P.)

##### **5. Einmalige Bestellvorgänge - Zeitungsjungenproblem (10 P.)**

Betrachtet wird die Bestellung eines verderblichen Gutes. Der Kostensatz für Fehlmengen sei  $c_u = 2$  Geldeinheiten, der für Restmengen betrage  $c_o = 3$  Geldeinheiten. Angestrebt wird die Minimierung der Summe aus Kosten für Fehlmengen sowie für Restmengen. (Erforderliche Tabellenwerke finden Sie im Anhang.)

- a) Unterstellen Sie zunächst, die Nachfrage folge einer Normalverteilung. Der Erwartungswert der zufälligen Nachfrage  $D$  sei  $\mu_D = 400$  Mengeneinheiten (ME) und die Standardabweichung betrage  $\sigma_D = 100$  ME.
  - i. Welche Bestellmenge führt in diesem Fall zum Kostenminimum? (3 P.)

ii. Wie groß sind bei einer Bestellmenge  $q$  von 500 Mengeneinheiten der Erwartungswert der Fehlmenge  $E[F(q)]$  sowie der Erwartungswert der Restmenge  $E[R(q)]$ ? (4 P.)

b) Unterstellen Sie nun, die Standardabweichung der Nachfrage betrage  $\sigma_D = 0$  Mengeneinheiten. Der Erwartungswert der Nachfrage  $D$  sei weiterhin  $\mu_D = 400$  ME. Welche Bestellmenge führt in diesem Fall zum Kostenminimum? Wie groß ist dieses Kostenminimum? (3 P.)

## 6. Fließbandabstimmung, Modellierung (15 P.):

Betrachten Sie die folgende Notationstabelle und darunter das aus der Vorlesung bekannte Entscheidungsmodell zur Fließbandabstimmung:

Symbol	Bedeutung
<b>Indizes</b>	
$i, j = 1, \dots, I$	Prozessschritte bzw. Arbeitselemente
$\mathcal{V}_j$	Menge jener Prozessschritte, die unmittelbare Vorgänger von Prozessschritt $j$ sind
$m = 1, \dots, M$	Stationen
<b>Parameter</b>	
$c$	Taktzeit
$t_i$	Zeitbedarf für Prozessschritt $i$
<b>Entscheidungsvariablen</b>	
$X_{im} \in \{0, 1\}$	gleich 1, wenn Prozessschritt $i$ der Station $m$ zugeordnet wird, 0 sonst

$$\text{Minimiere } Z = \sum_{m=1}^M m \cdot X_{I,m} \quad (5)$$

u. B. d. R.

$$\sum_{m=1}^M X_{im} = 1, \quad i = 1, \dots, I \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^I t_i \cdot X_{im} \leq c, \quad m = 1, \dots, M \quad (7)$$

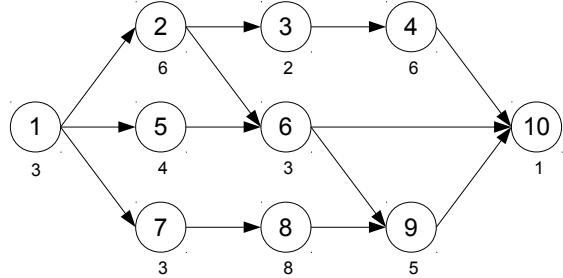
$$\sum_{m=1}^M m \cdot X_{im} \leq \sum_{m=1}^M m \cdot X_{jm}, \quad j = 1, \dots, I; i \in \mathcal{V}_j \quad (8)$$

Beantworten Sie dazu die folgenden Fragen:

- a) Was wird in Formel (5) durch den Term  $\sum_{m=1}^M m \cdot X_{I,m}$  ausgedrückt? (1 P.)

- b) Was wird in Formel (7) durch den Term  $\sum_{i=1}^I t_i \cdot X_{im}$  ausgedrückt? (2 P.)
- c) Was wird durch das Restriktionensystem (8) gefordert? (2 P.)
- d) Geben Sie ein System von bezüglich der Entscheidungsvariablen linearen Restriktionen an, durch welches Sie verhindern können, dass die Prozessschritte 2 und 4 gemeinsam einer Station zugeordnet werden! (2 P.)

- e) Betrachten Sie nun den in der folgenden Abbildung dargestellten Vorranggraphen. Die Zahlen unter den die Arbeitselemente darstellenden Kreisen sind die jeweiligen Bearbeitungszeiten.



Unterstellen Sie, dass maximal so viele Stationen geöffnet werden, wie es Arbeitselemente gibt, mithin also  $M = I = 10$  gilt.

- i. Geben Sie für diesen Vorranggraphen an, wie groß die Taktzeit  $c$  mindestens sein muss und wie groß sie in einer betriebswirtschaftlich sinnvollen Lösung maximal sein kann! Begründen Sie Ihre Angaben! (2 P.)

- ii. Geben Sie für diese konkrete Instanz alle Restriktionen gemäß Formel (8) des Entscheidungsmodells der Fließbandabstimmung für das Arbeitselement  $i = 6$  an! (2 P.)

- iii. Unterstellen Sie, dass die Taktzeit  $c = 41$  Zeiteinheiten beträgt. Prüfen Sie, ob eine Belegung aller Variablen mit  $X_{i,m} = 0$  **außer**

$$X_{1,2} = X_{2,1} = X_{3,1} = X_{4,1} = X_{5,1} = X_{6,1} = X_{7,1} = X_{8,1} = X_{9,1} = X_{10,1} = 1$$

eine zulässige und ggf. eine optimale Lösung darstellen kann! Begründen Sie zu beiden Punkten Ihre Antwort! (2 P.)

- iv. Unterstellen Sie, dass die Taktzeit  $c = 21$  Zeiteinheiten beträgt. Prüfen Sie, ob eine Belegung aller Variablen mit  $X_{i,m} = 0$  **außer**

$$X_{1,1} = X_{2,1} = X_{3,1} = X_{4,1} = X_{5,1} = X_{6,3} = X_{7,3} = X_{8,3} = X_{9,3} = X_{10,3} = 1$$

eine zulässige und ggf. eine optimale Lösung darstellen kann! Begründen Sie zu beiden Punkten Ihre Antwort! (2 P.)

# Anhang

## 1 Tabellenwerte der Standardnormalverteilung

Es sei  $X$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, es sei also ihr Erwartungswert  $\mu = 0$  und ihre Standardabweichung  $\sigma = 1$ . Die folgende Tabelle enthält für  $-3 \leq x \leq 3$  die korrespondierenden Werte der Verteilungsfunktion  $F_X(x)$ .

$x$	$F_X(x)$	$x$	$F_X(x)$	$x$	$F_X(x)$	$x$	$F_X(x)$	$x$	$F_X(x)$
-3,00	0,001350	-2,23	0,012874	-1,46	0,072145	-0,69	0,245097	0,08	0,531881
-2,99	0,001395	-2,22	0,013209	-1,45	0,073529	-0,68	0,248252	0,09	0,535856
-2,98	0,001441	-2,21	0,013553	-1,44	0,074934	-0,67	0,251429	0,10	0,539828
-2,97	0,001489	-2,20	0,013903	-1,43	0,076359	-0,66	0,254627	0,11	0,543795
-2,96	0,001538	-2,19	0,014262	-1,42	0,077804	-0,65	0,257846	0,12	0,547758
-2,95	0,001589	-2,18	0,014629	-1,41	0,079270	-0,64	0,261086	0,13	0,551717
-2,94	0,001641	-2,17	0,015003	-1,40	0,080757	-0,63	0,264347	0,14	0,555670
-2,93	0,001695	-2,16	0,015386	-1,39	0,082264	-0,62	0,267629	0,15	0,559618
-2,92	0,001750	-2,15	0,015778	-1,38	0,083793	-0,61	0,270931	0,16	0,563559
-2,91	0,001807	-2,14	0,016177	-1,37	0,085343	-0,60	0,274253	0,17	0,567495
-2,90	0,001866	-2,13	0,016586	-1,36	0,086915	-0,59	0,277595	0,18	0,571424
-2,89	0,001926	-2,12	0,017003	-1,35	0,088508	-0,58	0,280957	0,19	0,575345
-2,88	0,001988	-2,11	0,017429	-1,34	0,090123	-0,57	0,284339	0,20	0,579260
-2,87	0,002052	-2,10	0,017864	-1,33	0,091759	-0,56	0,287740	0,21	0,583166
-2,86	0,002118	-2,09	0,018309	-1,32	0,093418	-0,55	0,291160	0,22	0,587064
-2,85	0,002186	-2,08	0,018763	-1,31	0,095098	-0,54	0,294599	0,23	0,590954
-2,84	0,002256	-2,07	0,019226	-1,30	0,096800	-0,53	0,298056	0,24	0,594835
-2,83	0,002327	-2,06	0,019699	-1,29	0,098525	-0,52	0,301532	0,25	0,598706
-2,82	0,002401	-2,05	0,020182	-1,28	0,100273	-0,51	0,305026	0,26	0,602568
-2,81	0,002477	-2,04	0,020675	-1,27	0,102042	-0,50	0,308538	0,27	0,606420
-2,80	0,002555	-2,03	0,021178	-1,26	0,103835	-0,49	0,312067	0,28	0,610261
-2,79	0,002635	-2,02	0,021692	-1,25	0,105650	-0,48	0,315614	0,29	0,614092
-2,78	0,002718	-2,01	0,022216	-1,24	0,107488	-0,47	0,319178	0,30	0,617911
-2,77	0,002803	-2,00	0,022750	-1,23	0,109349	-0,46	0,322758	0,31	0,621720
-2,76	0,002890	-1,99	0,023295	-1,22	0,111232	-0,45	0,326355	0,32	0,625516
-2,75	0,002980	-1,98	0,023852	-1,21	0,113139	-0,44	0,329969	0,33	0,629300
-2,74	0,003072	-1,97	0,024419	-1,20	0,115070	-0,43	0,333598	0,34	0,633072
-2,73	0,003167	-1,96	0,024998	-1,19	0,117023	-0,42	0,337243	0,35	0,636831
-2,72	0,003264	-1,95	0,025588	-1,18	0,119000	-0,41	0,340903	0,36	0,640576
-2,71	0,003364	-1,94	0,026190	-1,17	0,121000	-0,40	0,344578	0,37	0,644309
-2,70	0,003467	-1,93	0,026803	-1,16	0,123024	-0,39	0,348268	0,38	0,648027
-2,69	0,003573	-1,92	0,027429	-1,15	0,125072	-0,38	0,351973	0,39	0,651732
-2,68	0,003681	-1,91	0,028067	-1,14	0,127143	-0,37	0,355691	0,40	0,655422
-2,67	0,003793	-1,90	0,028717	-1,13	0,129238	-0,36	0,359424	0,41	0,659097
-2,66	0,003907	-1,89	0,029379	-1,12	0,131357	-0,35	0,363169	0,42	0,662757
-2,65	0,004025	-1,88	0,030054	-1,11	0,133500	-0,34	0,366928	0,43	0,666402
-2,64	0,004145	-1,87	0,030742	-1,10	0,135666	-0,33	0,370700	0,44	0,670031
-2,63	0,004269	-1,86	0,031443	-1,09	0,137857	-0,32	0,374484	0,45	0,673645
-2,62	0,004396	-1,85	0,032157	-1,08	0,140071	-0,31	0,378280	0,46	0,677242
-2,61	0,004527	-1,84	0,032884	-1,07	0,142310	-0,30	0,382089	0,47	0,680822
-2,60	0,004661	-1,83	0,033625	-1,06	0,144572	-0,29	0,385908	0,48	0,684386
-2,59	0,004799	-1,82	0,034380	-1,05	0,146859	-0,28	0,389739	0,49	0,687933
-2,58	0,004940	-1,81	0,035148	-1,04	0,149170	-0,27	0,393580	0,50	0,691462
-2,57	0,005085	-1,80	0,035930	-1,03	0,151505	-0,26	0,397432	0,51	0,694974
-2,56	0,005234	-1,79	0,036727	-1,02	0,153864	-0,25	0,401294	0,52	0,698468
-2,55	0,005386	-1,78	0,037538	-1,01	0,156248	-0,24	0,405165	0,53	0,701944
-2,54	0,005543	-1,77	0,038364	-1,00	0,158655	-0,23	0,409046	0,54	0,705401
-2,53	0,005703	-1,76	0,039204	-0,99	0,161087	-0,22	0,412936	0,55	0,708840
-2,52	0,005868	-1,75	0,040059	-0,98	0,163543	-0,21	0,416834	0,56	0,712260
-2,51	0,006037	-1,74	0,040930	-0,97	0,166023	-0,20	0,420740	0,57	0,715661
-2,50	0,006210	-1,73	0,041815	-0,96	0,168528	-0,19	0,424655	0,58	0,719043
-2,49	0,006387	-1,72	0,042716	-0,95	0,171056	-0,18	0,428576	0,59	0,722405
-2,48	0,006569	-1,71	0,043633	-0,94	0,173609	-0,17	0,432505	0,60	0,725747
-2,47	0,006756	-1,70	0,044565	-0,93	0,176186	-0,16	0,436441	0,61	0,729069
-2,46	0,006947	-1,69	0,045514	-0,92	0,178786	-0,15	0,440382	0,62	0,732371
-2,45	0,007143	-1,68	0,046479	-0,91	0,181411	-0,14	0,444330	0,63	0,735653
-2,44	0,007344	-1,67	0,047460	-0,90	0,184060	-0,13	0,448283	0,64	0,738914
-2,43	0,007549	-1,66	0,048457	-0,89	0,186733	-0,12	0,452242	0,65	0,742154
-2,42	0,007760	-1,65	0,049471	-0,88	0,189430	-0,11	0,456205	0,66	0,745373
-2,41	0,007976	-1,64	0,050503	-0,87	0,192150	-0,10	0,460172	0,67	0,748571
-2,40	0,008198	-1,63	0,051551	-0,86	0,194895	-0,09	0,464144	0,68	0,751748
-2,39	0,008424	-1,62	0,052616	-0,85	0,197663	-0,08	0,468119	0,69	0,754903
-2,38	0,008656	-1,61	0,053699	-0,84	0,200454	-0,07	0,472097	0,70	0,758036
-2,37	0,008894	-1,60	0,054799	-0,83	0,203269	-0,06	0,476078	0,71	0,761148
-2,36	0,009137	-1,59	0,055917	-0,82	0,206108	-0,05	0,480061	0,72	0,764238
-2,35	0,009387	-1,58	0,057053	-0,81	0,208970	-0,04	0,484047	0,73	0,767305
-2,34	0,009642	-1,57	0,058208	-0,80	0,211855	-0,03	0,488034	0,74	0,770350
-2,33	0,009903	-1,56	0,059380	-0,79	0,214764	-0,02	0,492022	0,75	0,773373
-2,32	0,010170	-1,55	0,060571	-0,78	0,217695	-0,01	0,496011	0,76	0,776373
-2,31	0,010444	-1,54	0,061780	-0,77	0,220650	0,00	0,500000	0,77	0,779350
-2,30	0,010724	-1,53	0,063008	-0,76	0,223627	0,01	0,503989	0,78	0,782305
-2,29	0,011011	-1,52	0,064255	-0,75	0,226627	0,02	0,507978	0,79	0,785236
-2,28	0,011304	-1,51	0,065522	-0,74	0,229650	0,03	0,511966	0,80	0,788145
-2,27	0,011604	-1,50	0,066807	-0,73	0,232695	0,04	0,515953	0,81	0,791030
-2,26	0,011911	-1,49	0,068112	-0,72	0,235762	0,05	0,519939	0,82	0,793892
-2,25	0,012224	-1,48	0,069437	-0,71	0,238852	0,06	0,523922	0,83	0,796731
-2,24	0,012545	-1,47	0,070781	-0,70	0,241964	0,07	0,527903	0,84	0,799546

0,85	0,802337	1,27	0,897958	1,71	0,956367	2,15	0,984222	2,59	0,995201
0,86	0,805105	1,28	0,899727	1,72	0,957284	2,16	0,984614	2,60	0,995339
0,87	0,807850	1,29	0,901475	1,73	0,958185	2,17	0,984997	2,61	0,995473
0,88	0,810570	1,30	0,903200	1,74	0,959070	2,18	0,985371	2,62	0,995604
0,89	0,813267	1,31	0,904902	1,75	0,959941	2,19	0,985738	2,63	0,995731
0,90	0,815940	1,32	0,906582	1,76	0,960796	2,20	0,986097	2,64	0,995855
0,91	0,818589	1,33	0,908241	1,77	0,961636	2,21	0,986447	2,65	0,995975
0,92	0,821214	1,34	0,909877	1,78	0,962462	2,22	0,986791	2,66	0,996093
0,93	0,823814	1,35	0,911492	1,79	0,963273	2,23	0,987126	2,67	0,996207
0,94	0,826391	1,36	0,913085	1,80	0,964070	2,24	0,987455	2,68	0,996319
0,95	0,828944	1,37	0,914657	1,81	0,964852	2,25	0,987776	2,69	0,996427
0,96	0,831472	1,38	0,916207	1,82	0,965620	2,26	0,988089	2,70	0,996533
0,97	0,833977	1,39	0,917736	1,83	0,966375	2,27	0,988396	2,71	0,996636
0,98	0,836457	1,40	0,919243	1,84	0,967116	2,28	0,988696	2,72	0,996736
0,99	0,838913	1,41	0,920730	1,85	0,967843	2,29	0,988989	2,73	0,996833
1,00	0,841345	1,42	0,922196	1,86	0,968557	2,30	0,989276	2,74	0,996928
1,01	0,843752	1,43	0,923641	1,87	0,969258	2,31	0,989556	2,75	0,997020
1,02	0,846136	1,44	0,925066	1,88	0,969946	2,32	0,989830	2,76	0,997110
1,03	0,848495	1,45	0,926471	1,89	0,970621	2,33	0,990097	2,77	0,997197
1,04	0,850830	1,46	0,927855	1,90	0,971283	2,34	0,990358	2,78	0,997282
1,05	0,853141	1,47	0,929219	1,91	0,971933	2,35	0,990613	2,79	0,997365
1,06	0,855428	1,48	0,930563	1,92	0,972571	2,36	0,990863	2,80	0,997445
1,07	0,857690	1,49	0,931888	1,93	0,973197	2,37	0,991106	2,81	0,997523
1,08	0,859929	1,50	0,933193	1,94	0,973810	2,38	0,991344	2,82	0,997599
1,09	0,862143	1,51	0,934478	1,95	0,974412	2,39	0,991576	2,83	0,997673
1,10	0,864334	1,52	0,935745	1,96	0,975002	2,40	0,991802	2,84	0,997744
1,11	0,866500	1,53	0,936992	1,97	0,975581	2,41	0,992024	2,85	0,997814
1,12	0,868643	1,54	0,938220	1,98	0,976148	2,42	0,992240	2,86	0,997882
1,13	0,870762	1,55	0,939429	1,99	0,976705	2,43	0,992451	2,87	0,997948
1,14	0,872857	1,56	0,940620	2,00	0,977250	2,44	0,992656	2,88	0,998012
1,15	0,874928	1,57	0,941792	2,01	0,977784	2,45	0,992857	2,89	0,998074
1,16	0,876976	1,58	0,942947	2,02	0,978308	2,46	0,993053	2,90	0,998134
1,17	0,879000	1,59	0,944083	2,03	0,978822	2,47	0,993244	2,91	0,998193
1,18	0,881000	1,60	0,945201	2,04	0,979325	2,48	0,993431	2,92	0,998250
1,19	0,882977	1,61	0,946301	2,05	0,979818	2,49	0,993613	2,93	0,998305
1,20	0,884930	1,62	0,947384	2,06	0,980301	2,50	0,993790	2,94	0,998359
1,21	0,886861	1,63	0,948449	2,07	0,980774	2,51	0,993963	2,95	0,998411
1,22	0,888768	1,64	0,949497	2,08	0,981237	2,52	0,994132	2,96	0,998462
1,23	0,890651	1,65	0,950529	2,09	0,981691	2,53	0,994297	2,97	0,998511
1,24	0,892512	1,66	0,951543	2,10	0,982136	2,54	0,994457	2,98	0,998559
1,25	0,894350	1,67	0,952540	2,11	0,982571	2,55	0,994614	2,99	0,998605
1,26	0,896165	1,68	0,953521	2,12	0,982997	2,56	0,994766	3,00	0,998650
		1,69	0,954486	2,13	0,983414	2,57	0,994915		
		1,70	0,955435	2,14	0,983823	2,58	0,995060		

## 2 Standardisierte Fehlmengenerwartungswerte

Es sei  $X$  eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, folglich gilt für ihre Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (9)$$

Man kann nun die Frage stellen, wie groß der Erwartungswert jenes Betrages ist, um den die standardnormalverteilte Zufallsvariable  $X$  einen vorgegebenen Wert  $v$  überschreitet, und dafür das Symbol  $\Phi^1(v)$  definieren:

$$\begin{aligned} \Phi^1(v) &= E[\max(0, X - v)] \\ &= \int_{x=-\infty}^{x=\infty} \max(0, x - v) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{x=v}^{x=\infty} (x - v) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned} \quad (10)$$

Diese Größe wird als *standardisierter Fehlmengenerwartungswert* oder auch als *Verlustfunktion erster Ordnung* bezeichnet, weil man mit ihr abbilden kann, um wie viel eine zufällige standardnormalverteilte Nachfrage  $X$  einen vorhandenen Bestand oder eine beschaffte Menge  $v$  im Mittel überschreitet.

Die folgende Tabelle enthält für  $-3 \leq v \leq 3$  die korrespondierenden standardisierten Fehlmengenerwartungswerte  $\Phi^1(v)$ .

$v$	$\Phi^1(v)$	$v$	$\Phi^1(v)$	$v$	$\Phi^1(v)$	$v$	$\Phi^1(v)$
-3,00	3,000382	-2,50	2,502004	-2,00	2,008491	-1,50	1,529307
-2,99	2,990396	-2,49	2,492067	-1,99	1,998721	-1,49	1,519981
-2,98	2,980410	-2,48	2,482132	-1,98	1,988957	-1,48	1,510669
-2,97	2,970425	-2,47	2,472199	-1,97	1,979198	-1,47	1,501370
-2,96	2,960440	-2,46	2,462267	-1,96	1,969445	-1,46	1,492085
-2,95	2,950455	-2,45	2,452337	-1,95	1,959698	-1,45	1,482813
-2,94	2,940472	-2,44	2,442410	-1,94	1,949957	-1,44	1,473555
-2,93	2,930488	-2,43	2,432484	-1,93	1,940222	-1,43	1,464312
-2,92	2,920506	-2,42	2,422561	-1,92	1,930493	-1,42	1,455083
-2,91	2,910523	-2,41	2,412640	-1,91	1,920770	-1,41	1,445868
-2,90	2,900542	-2,40	2,402720	-1,90	1,911054	-1,40	1,436668
-2,89	2,890561	-2,39	2,392804	-1,89	1,901345	-1,39	1,427483
-2,88	2,880580	-2,38	2,382889	-1,88	1,891642	-1,38	1,418314
-2,87	2,870600	-2,37	2,372977	-1,87	1,881946	-1,37	1,409159
-2,86	2,860621	-2,36	2,363067	-1,86	1,872257	-1,36	1,400020
-2,85	2,850643	-2,35	2,353159	-1,85	1,862575	-1,35	1,390898
-2,84	2,840665	-2,34	2,343255	-1,84	1,852900	-1,34	1,381791
-2,83	2,830688	-2,33	2,333352	-1,83	1,843233	-1,33	1,372700
-2,82	2,820712	-2,32	2,323453	-1,82	1,833573	-1,32	1,363626
-2,81	2,810736	-2,31	2,313556	-1,81	1,823920	-1,31	1,354568
-2,80	2,800761	-2,30	2,303662	-1,80	1,814276	-1,30	1,345528
-2,79	2,790787	-2,29	2,293770	-1,79	1,804639	-1,29	1,336505
-2,78	2,780814	-2,28	2,283882	-1,78	1,795010	-1,28	1,327499
-2,77	2,770841	-2,27	2,273996	-1,77	1,785390	-1,27	1,318510
-2,76	2,760870	-2,26	2,264114	-1,76	1,775777	-1,26	1,309539
-2,75	2,750899	-2,25	2,254235	-1,75	1,766174	-1,25	1,300587
-2,74	2,740929	-2,24	2,244358	-1,74	1,756579	-1,24	1,291653
-2,73	2,730961	-2,23	2,234486	-1,73	1,746992	-1,23	1,282737
-2,72	2,720993	-2,22	2,224616	-1,72	1,737415	-1,22	1,273840
-2,71	2,711026	-2,21	2,214750	-1,71	1,727847	-1,21	1,264961
-2,70	2,701060	-2,20	2,204887	-1,70	1,718288	-1,20	1,256102
-2,69	2,691095	-2,19	2,195028	-1,69	1,708738	-1,19	1,247263
-2,68	2,681132	-2,18	2,185172	-1,68	1,699198	-1,18	1,238443
-2,67	2,671169	-2,17	2,175320	-1,67	1,689668	-1,17	1,229643
-2,66	2,661207	-2,16	2,165472	-1,66	1,680147	-1,16	1,220863
-2,65	2,651247	-2,15	2,155628	-1,65	1,670637	-1,15	1,212104
-2,64	2,641288	-2,14	2,145788	-1,64	1,661137	-1,14	1,203365
-2,63	2,631330	-2,13	2,135952	-1,63	1,651647	-1,13	1,194646
-2,62	2,621373	-2,12	2,126120	-1,62	1,642168	-1,12	1,185949
-2,61	2,611418	-2,11	2,116292	-1,61	1,632699	-1,11	1,177274
-2,60	2,601464	-2,10	2,106468	-1,60	1,623242	-1,10	1,168620
-2,59	2,591511	-2,09	2,096649	-1,59	1,613796	-1,09	1,159987
-2,58	2,581560	-2,08	2,086835	-1,58	1,604360	-1,08	1,151377
-2,57	2,571610	-2,07	2,077024	-1,57	1,594937	-1,07	1,142789
-2,56	2,561662	-2,06	2,067219	-1,56	1,585525	-1,06	1,134223
-2,55	2,551715	-2,05	2,057418	-1,55	1,576124	-1,05	1,125680
-2,54	2,541769	-2,04	2,047623	-1,54	1,566736	-1,04	1,117160
-2,53	2,531826	-2,03	2,037832	-1,53	1,557360	-1,03	1,108664
-2,52	2,521883	-2,02	2,028046	-1,52	1,547996	-1,02	1,100190
-2,51	2,511943	-2,01	2,018266	-1,51	1,538645	-1,01	1,091741

-0,50	0,697797	0,19	0,311122	0,90	0,100431	1,61	0,022699	2,32	0,003453
-0,49	0,690900	0,20	0,306895	0,91	0,098604	1,62	0,022168	2,33	0,003352
-0,48	0,684038	0,21	0,302707	0,92	0,096803	1,63	0,021647	2,34	0,003255
-0,47	0,677212	0,22	0,298558	0,93	0,095028	1,64	0,021137	2,35	0,003159
-0,46	0,670422	0,23	0,294448	0,94	0,093279	1,65	0,020637	2,36	0,003067
-0,45	0,663667	0,24	0,290377	0,95	0,091556	1,66	0,020147	2,37	0,002977
-0,44	0,656949	0,25	0,286345	0,96	0,089858	1,67	0,019668	2,38	0,002889
-0,43	0,650267	0,26	0,282351	0,97	0,088185	1,68	0,019198	2,39	0,002804
-0,42	0,643621	0,27	0,278396	0,98	0,086537	1,69	0,018738	2,40	0,002720
-0,41	0,637011	0,28	0,274479	0,99	0,084914	1,70	0,018288	2,41	0,002640
-0,40	0,630439	0,29	0,270601	1,00	0,083315	1,71	0,017847	2,42	0,002561
-0,39	0,623903	0,30	0,266761	1,01	0,081741	1,72	0,017415	2,43	0,002484
-0,38	0,617404	0,31	0,262959	1,02	0,080190	1,73	0,016992	2,44	0,002410
-0,37	0,610943	0,32	0,259196	1,03	0,078664	1,74	0,016579	2,45	0,002337
-0,36	0,604518	0,33	0,255470	1,04	0,077160	1,75	0,016174	2,46	0,002267
-0,35	0,598131	0,34	0,251782	1,05	0,075680	1,76	0,015777	2,47	0,002199
-0,34	0,591782	0,35	0,248131	1,06	0,074223	1,77	0,015390	2,48	0,002132
-0,33	0,585470	0,36	0,244518	1,07	0,072789	1,78	0,015010	2,49	0,002067
-0,32	0,579196	0,37	0,240943	1,08	0,071377	1,79	0,014639	2,50	0,002004
-0,31	0,572959	0,38	0,237404	1,09	0,069987	1,80	0,014276	2,51	0,001943
-0,30	0,566761	0,39	0,233903	1,10	0,068620	1,81	0,013920	2,52	0,001883
-0,29	0,560601	0,40	0,230439	1,11	0,067274	1,82	0,013573	2,53	0,001826
-0,28	0,554479	0,41	0,227011	1,12	0,065949	1,83	0,013233	2,54	0,001769
-0,27	0,548396	0,42	0,223621	1,13	0,064646	1,84	0,012900	2,55	0,001715
-0,26	0,542351	0,43	0,220267	1,14	0,063365	1,85	0,012575	2,56	0,001662
-0,25	0,536345	0,44	0,216949	1,15	0,062104	1,86	0,012257	2,57	0,001610
-0,24	0,530377	0,45	0,213667	1,16	0,060863	1,87	0,011946	2,58	0,001560
-0,23	0,524448	0,46	0,210422	1,17	0,059643	1,88	0,011642	2,59	0,001511
-0,22	0,518558	0,47	0,207212	1,18	0,058443	1,89	0,011345	2,60	0,001464
-0,21	0,512707	0,48	0,204038	1,19	0,057263	1,90	0,011054	2,61	0,001418
-0,20	0,506895	0,49	0,200900	1,20	0,056102	1,91	0,010770	2,62	0,001373
-0,19	0,501122	0,50	0,197797	1,21	0,054961	1,92	0,010493	2,63	0,001330
-0,18	0,495388	0,51	0,194729	1,22	0,053840	1,93	0,010222	2,64	0,001288
-0,17	0,489693	0,52	0,191696	1,23	0,052737	1,94	0,009957	2,65	0,001247
-0,16	0,484038	0,53	0,188698	1,24	0,051653	1,95	0,009698	2,66	0,001207
-0,15	0,478422	0,54	0,185735	1,25	0,050587	1,96	0,009445	2,67	0,001169
-0,14	0,472846	0,55	0,182806	1,26	0,049539	1,97	0,009198	2,68	0,001132
-0,13	0,467309	0,56	0,179912	1,27	0,048510	1,98	0,008957	2,69	0,001095
-0,12	0,461811	0,57	0,177051	1,28	0,047499	1,99	0,008721	2,70	0,001060
-0,11	0,456353	0,58	0,174225	1,29	0,046505	2,00	0,008491	2,71	0,001026
-0,10	0,450935	0,59	0,171432	1,30	0,045528	2,01	0,008266	2,72	0,000993
-0,09	0,445557	0,60	0,168673	1,31	0,044568	2,02	0,008046	2,73	0,000961
-0,08	0,440218	0,61	0,165947	1,32	0,043626	2,03	0,007832	2,74	0,000929
-0,07	0,434919	0,62	0,163254	1,33	0,042700	2,04	0,007623	2,75	0,000899
-0,06	0,429660	0,63	0,160594	1,34	0,041791	2,05	0,007418	2,76	0,000870
-0,05	0,424441	0,64	0,157967	1,35	0,040898	2,06	0,007219	2,77	0,000841
-0,04	0,419261	0,65	0,155372	1,36	0,040020	2,07	0,007024	2,78	0,000814
-0,03	0,414122	0,66	0,152810	1,37	0,039159	2,08	0,006835	2,79	0,000787
-0,02	0,389022	0,67	0,150280	1,38	0,038314	2,09	0,006649	2,80	0,000761
-0,01	0,384122	0,68	0,147781	1,39	0,037483	2,10	0,006468	2,81	0,000736
0,00	0,379261	0,69	0,145315	1,40	0,036668	2,11	0,006292	2,82	0,000712
0,01	0,374441	0,70	0,142879	1,41	0,035868	2,12	0,006120	2,83	0,000688
0,02	0,369842	0,71	0,140475	1,42	0,035083	2,13	0,005952	2,84	0,000665
0,03	0,363962	0,72	0,138102	1,43	0,034312	2,14	0,005788	2,85	0,000643
0,04	0,357926	0,73	0,135760	1,44	0,033555	2,15	0,005628	2,86	0,000621
0,05	0,352441	0,74	0,133448	1,45	0,032813	2,16	0,005472	2,87	0,000600
0,06	0,346660	0,75	0,131167	1,46	0,032085	2,17	0,005320	2,88	0,000580
0,07	0,340419	0,76	0,128916	1,47	0,031370	2,18	0,005172	2,89	0,000561
0,08	0,3360218	0,77	0,126694	1,48	0,030669	2,19	0,005028	2,90	0,000542
0,09	0,332846	0,78	0,124503	1,49	0,029981	2,20	0,004887	2,91	0,000523
0,10	0,330935	0,79	0,122340	1,50	0,029307	2,21	0,004750	2,92	0,000506
0,11	0,346353	0,80	0,120207	1,51	0,028645	2,22	0,004616	2,93	0,000488
0,12	0,341811	0,81	0,118103	1,52	0,027996	2,23	0,004486	2,94	0,000472
0,13	0,337309	0,82	0,116028	1,53	0,027360	2,24	0,004358	2,95	0,000455
0,14	0,332842	0,83	0,113981	1,54	0,026736	2,25	0,004235	2,96	0,000440
0,15	0,328422	0,84	0,111962	1,55	0,026124	2,26	0,004114	2,97	0,000425
0,16	0,324038	0,85	0,109972	1,56	0,025525	2,27	0,003996	2,98	0,000410
0,17	0,319693	0,86	0,108009	1,57	0,024937	2,28	0,003882	2,99	0,000396
0,18	0,315388	0,87	0,106074	1,58	0,024360	2,29	0,003770	3,00	0,000382
		0,88	0,104166	1,59	0,023796	2,30	0,003662		
		0,89	0,102285	1,60	0,023242	2,31	0,003556		