

Klausur zur Vorlesung
“Operations Research”
im Sommersemester 2017

Hinweise:

- Die Klausur besteht aus **15** Seiten (inkl. Deckblatt). Bitte überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar vollständig ist und lassen Sie sich ggf. ein anderes geben.
- Die Klausur besteht aus **vier** Aufgaben, die **alle** zu bearbeiten sind.
- Die Klausurdauer beträgt 60 Minuten und es sind maximal insgesamt 60 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel ist ein nicht alpha-numerisch programmierbarer Taschenrechner zulässig sowie ein beidseitig handbeschriebenes Hilfsblatt im Format DIN A4 mit Formeln etc. nach Ihrer Wahl.
- Zur Beantwortung der Fragen finden Sie genügend Platz in der Klausur. Bitte reißen Sie die Klausur **nicht** auseinander und verwenden Sie kein eigenes Papier.
- Tragen Sie bitte zuerst Ihre persönlichen Daten ein.
- Sie dürfen die Fragen in deutscher oder englischer Sprache beantworten!
(*You may answer the questions using either the German or the English language.*)

Persönliche Daten:

Nachname	Vorname	Matrikelnr.	Studienfach	Semester

Bewertung:

Aufg.	1	2	3	4	Summe
Punkte					

1. Modellierung, GAMS (*Modeling, GAMS*) (14 P.)

Betrachten Sie die folgende Sammlung von potentiellen Investitionsprojekten $i = 1, \dots, 5$ mit jeweiligem Kapitalbedarf w_i und Gewinn u_i :

(*Consider the following collection of potential investment projects $i = 1, \dots, 5$ with capital requirements w_i and profit u_i :*)

i	1	2	3	4	5
w_i	5	6	12	10	12
u_i	10	9	12	5	9

Das verfügbare Budget ist $C = 30$.

(*The available budget is $C = 30$.*)

- (a) Definieren Sie eine geeignete Entscheidungsvariable x_i und formulieren Sie damit ein geeignetes algebraisches Optimierungsmodell zur Bestimmung einer gewinnmaximierenden Auswahl von Investitionsprojekten!

(*Define a suitable decision variable x_i and use it to formulate an algebraic optimization model to determine a profit-maximizing selection of investment projects!*)

(4 P.)

- (b) Geben Sie eine Restriktion an, durch die Sie erreichen können, dass mindestens zwei der ersten drei Projekte ausgewählt werden!

(*Give a constraint to ensure that at least two of the first three projects are selected!*)

(1 P.)

- (c) Geben Sie eine Restriktion an, durch die Sie erreichen können, dass entweder Projekt 2 oder Projekt 5 ausgewählt werden, aber nicht beide!
(Give a constraint to ensure that either project 2 or project 5 is selected, but not both!) (1 P.)

- (d) Geben Sie eine Restriktion an, durch die Sie erreichen können, dass, sofern Projekt 1 ausgewählt wird, dies auch für Projekt 3 gilt!
(Give a constraint to ensure that in case project 1 is selected, project 3 is also selected!) (1 P.)

- (e) Geben Sie eine Restriktion an, durch die Sie erreichen können, dass, sofern Projekt 3 ausgewählt wird, das Projekt 1 nicht ausgewählt werden darf!

(Give a constraint to ensure that in case project 3 is selected, project 1 must not be selected as well!) (1 P.)

- (f) Ein unerfahrener Student des Operations Research hat den Versuch unternommen, zur optimalen Lösung des in Teil (a) genannten Problems ein GAMS-Programm zu formulieren. Finden Sie die Fehler in dem Programm und korrigieren Sie diese!

(A novice OR student made an attempt to formulate a GAMS program to optimally solve the problem mentioned in (a). Find the errors in the program and correct them.) (6 P.)

* *KnapsackErrors.gms*

```
set i projects;
```

```
parameters
```

```
    u(i) profit
      / i1  10,
        i2  9,
        i3 12,
        i4  5,
        i5  9/
    w(i) invest
      / i1  5,
        i2  6,
        i3 12,
        i4 10,
        i5 12/
    c    capital budget ;
```

```
positive variable z;
```

```
variables x(i);
```

```
equations ObjectiveFunction, BudgetConstraint;
```

```
ObjectiveFunction..
```

```
    z =e= sum(i,u(i)*x(i));
```

```
BudgetConstraint..
```

```
    c =l= sum(i,w(i)*x(i));
```

```
model knapsack /all/;
```

```
solve knapsack maximizing z using rmip;
```

2. Verbesserungssuche (*Improvement search*): (11 P.)

- (a) Im Folgenden sehen Sie die Richtungen und Schrittweiten einer Verbesserungssuche, die am Punkt $\mathbf{y}^{(0)} = (1, 2, 3)$ begann. Berechnen Sie die Sequenz der Punkte, die während der Suche besucht wurden.

(The following shows the sequence of directions and steps employed by an improving search that began at $\mathbf{y}^{(0)} = (1, 2, 3)$. Compute the sequence of points visited by the search). (2 P.)

$$\Delta \mathbf{y}^{(1)} = (3, 0, 2), \lambda_1 = 2,$$

$$\Delta \mathbf{y}^{(2)} = (1, 4, 0), \lambda_2 = 4$$

(b) Ermitteln Sie eine verbessernde Richtung anhand der Gradienten jeder der angegebenen Zielfunktionen an der angegebenen Stelle.

(Construct an improving direction from the gradient of each of the given objective functions at the point indicated.) (6 P.)

i. max $(w_1)^2 + 3w_1w_2$ an Punkt *(at point)* $\mathbf{w} = (2, 4)$

ii. min $\ln(w_1) + 3w_2$ an Punkt *(at point)* $\mathbf{w} = (2, 1000)$

iii. max $4(w_1)^2 + w_2w_3 - 2(w_5)^3$ an Punkt (*at point*) $\mathbf{w} = (1, 4, 7, 0, 2)$

- (c) Im Folgenden sehen Sie für jede der Zielfunktionen aus (b) eine Richtung $\Delta \mathbf{w}$. Ermitteln Sie durch einen geeigneten Gradienten-Test, ob diese Richtung eine Verbesserung hinsichtlich der Zielfunktion darstellt.

(The following shows for each of the objective functions from (b) a direction $\Delta \mathbf{w}$. Determine by an appropriate gradient test whether this direction improves on the respective objective function.) (3 P.)

i. $\max (w_1)^2 + 3w_1w_2$ an Punkt (*at point*) $\mathbf{w} = (2, 4)$: $\Delta \mathbf{w} = (1, -1)$

ii. $\min \ln(w_1) + 3w_2$ an Punkt (*at point*) $\mathbf{w} = (2, 1000)$: $\Delta \mathbf{w} = (-2, 3)$

iii. $\max 4(w_1)^2 + w_2w_3 - 2(w_5)^3$ an Punkt (*at point*) $\mathbf{w} = (1, 4, 7, 0, 2)$:
 $\Delta \mathbf{w} = (0, 2, 3, 12, 2)$

3. Lineare Programmierung (*Linear Programming*) (21 P.)

Betrachten Sie die folgende unvollständig dokumentierte Simplex-Suche.

(*Consider the following incompletely documented Simplex search.*)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
max \mathbf{c}	3	9	0	0	0	\mathbf{b}
\mathbf{A}	3	3	1	0	0	18
	3	-6	0	1	0	6
	0	3	0	0	1	12
t=0	N	①	B	②	B	
$\mathbf{x}^{(0)}$	③	0	④	6	12	$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^{(0)} = 0$
$\Delta \mathbf{x}$ for x_1	⑤	⑥	-3	⑦	0	$\bar{c}_1 = 3$
$\Delta \mathbf{x}$ for x_2	0	⑧	-3	6	-3	$\bar{c}_2 = 9$
	-	-	$\frac{18}{-(-3)}$	-	$\frac{12}{-(-3)}$	⑨
t=1	N	B	B	B	N	
$\mathbf{x}^{(1)}$	0	4	6	30	0	$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^{(1)} = 36$
$\Delta \mathbf{x}$ for x_1	1	0	-3	-3	0	$\bar{c}_1 = 3$
$\Delta \mathbf{x}$ for x_5	0	$-\frac{1}{3}$	1	-2	1	$\bar{c}_5 = -3$
	-	-	⑩	$\frac{30}{-(-3)}$	-	⑪
t=2	B	B	N	B	N	
$\mathbf{x}^{(2)}$	2	⑫	⑬	24	0	⑭
$\Delta \mathbf{x}$ for x_3	$-\frac{1}{3}$	0	1	1	0	$\bar{c}_3 = -1$
$\Delta \mathbf{x}$ for x_5	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-3	1	$\bar{c}_5 = -2$

Ihr Ergebnis (*Your conclusion*) :

- (a) Die nummerierten Kreise ① bis ⑭ markieren fehlenden Werte, die Sie bitte ermitteln und in der folgenden Tabelle eintragen!

(*The numbered circles ① to ⑭ indicate missing values. Please determine these values and enter them in the table below.*) (7 P.)

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭

(b) Wie interpretieren Sie das Ergebnis der Berechnung? Warum?
(How do you interpret the result of the computation? Why?) (2 P.)

(c) Geben Sie zu den Daten der obigen Simplex-Suche das zugrundeliegende (primale) lineare Programm an sowie die Werte der Entscheidungsvariablen, der Zielfunktion und der Schattenpreise in dessen optimaler Lösung!
(Give for the data of the Simplex search documented above the underlying (primal) linear program as well as the values of the decision variables, the objective function and the marginals (shadow prices) in the optimal solution!) (4 P.)

- (d) Geben Sie das korrespondierende duale Programm an. Geben Sie für das duale Programm die optimalen Werte der Entscheidungsvariablen, der Zielfunktion und die Schattenpreise an.

(Give the corresponding dual program. Give for the dual program the optimal values of the decision variables, the objective function and the marginals (shadow prices)!) (4 P.)

- (e) Unterstellen Sie, dass Sie ein lineares Programm optimal gelöst haben. Was sagt dann der Satz vom komplementären Schlupf aus?

Assume that you have solved a linear program to optimality. What do the complementary slackness conditions state in this case? (4 P.)

4. Branch & Bound (14 P.)

Die folgende Tabelle zeigt für ein binäres Maximierungsproblem mit Entscheidungsvariablen $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ für alle Kombinationen von fixierten und freien (d.h., binär-relaxierten) Variablen die Relaxationsoptima \tilde{x} mit Zielfunktionswert \tilde{v} .

(The following table shows for a binary maximization problem with decision variables $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ for all combinations of fixed and free, i.e., binary-relaxed, variables the LP relaxation optima \tilde{x} with objective function value \tilde{v} .)

x_1	x_2	x_3	\tilde{x}	\tilde{v}
#	#	#	(0.91, 1.00, 1.00)	30.091
#	#	0	(1.00, 1.00, 0.00)	19.000
#	#	1	(0.91, 1.00, 1.00)	30.091
#	0	#	(1.00, 0.00, 1.00)	22.000
#	0	0	(1.00, 0.00, 0.00)	10.000
#	0	1	(1.00, 0.00, 1.00)	22.000
#	1	#	(0.91, 1.00, 1.00)	30.091
#	1	0	(1.00, 1.00, 0.00)	19.000
#	1	1	(0.91, 1.00, 1.00)	30.091
0	#	#	(0.00, 1.00, 1.00)	21.000
0	#	0	(0.00, 1.00, 0.00)	9.000
0	#	1	(0.00, 1.00, 1.00)	21.000
0	0	#	(0.00, 0.00, 1.00)	12.000
0	0	0	(0.00, 0.00, 0.00)	0.000
0	0	1	(0.00, 0.00, 1.00)	12.000
0	1	#	(0.00, 1.00, 1.00)	21.000
0	1	0	(0.00, 1.00, 0.00)	9.000
0	1	1	(0.00, 1.00, 1.00)	21.000
1	#	#	(1.00, 1.00, 0.92)	30.000
1	#	0	(1.00, 1.00, 0.00)	19.000
1	#	1	(1.00, 0.88, 1.00)	29.875
1	0	#	(1.00, 0.00, 1.00)	22.000
1	0	0	(1.00, 0.00, 0.00)	10.000
1	0	1	(1.00, 0.00, 1.00)	22.000
1	1	#	(1.00, 1.00, 0.92)	30.000
1	1	0	(1.00, 1.00, 0.00)	19.000
1	1	1	Infeasible	

Bestimmen Sie die optimale Lösung des binären Maximierungsproblems durch Anwendung des Branch&Bound-Algorithmus 12A mit den folgenden Spezifikationen:

- Führen Sie eine Tiefensuche durch!
- Wenn Sie zwischen aktiven Kandidatenproblem auszuwählen haben, so erzeugen Sie das zunächst zu betrachtende Teilproblem durch Aufrunden ($x_i = 1$), und erst später das durch Abrunden ($x_i = 0$) entstehende Teilproblem.
- Nummerieren Sie die Kandidatenprobleme in der Reihenfolge, in der sie deren Relaxationen analysieren.
- Dokumentieren Sie in dem von Ihnen gezeichneten Suchbaum für jedes Kandidatenproblem das Relaxationsergebnis und die resultierende Entscheidung.

(Determine the optimal solution of the binary maximization problem by applying the Branch&Bound Algorithm 12A with the following specifications:

- *Perform a depth-first search!*
- *When selecting between active candidate problems, break ties in favor of $x_i = 1$, i.e., first create a new candidate by rounding up, and only later by rounding down ($x_i = 0$).*
- *Number the candidate problems in the sequence you analyze their relaxations.*
- *Document in your search tree you draw for each candidate the relaxation outcome and the resulting decision.)*

