

Klausur zur Vorlesung
“**Operations Research**” (70141/70741/171154/171454)
im Sommersemester 2018

Hinweise:

- Die Klausur besteht aus **10** Seiten (inkl. Deckblatt). Bitte überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar vollständig ist und lassen Sie sich ggf. ein anderes geben.
(*The exam consists of 10 pages (including the cover sheet). Please check your copy for completeness and ask for a new one in case of missing pages.*)
- Alle Aufgaben sind zu bearbeiten.
(*All tasks are mandatory.*)
- Die Klausurdauer beträgt 60 Minuten und es sind maximal 60 Punkte zu erreichen.
(*Within the exam's time frame of 60 minutes 60 points are potentially attainable.*)
- **Der Lösungsweg muss erkennbar sein!**
(*Your solution approach has to be comprehensible.*)
- Als Hilfsmittel ist ein nicht alpha-numerisch programmierbarer Taschenrechner zulässig sowie ein beidseitig handbeschriebenes Hilfsblatt im Format DIN A4 mit Formeln etc. nach Ihrer Wahl.
(*Permitted items and materials are a non-programmable calculator and a handwritten two-sided standard DIN A4 sheet with formulas, notes etc. of your choice.*)
- Zur Beantwortung der Fragen finden Sie genügend Platz in der Klausur. Bitte reißen Sie die Klausur nicht auseinander und verwenden Sie kein eigenes Papier.
(*To answer the questions you will find enough space in the exam sheets. Do not use your own paper and refrain from tearing the exam apart.*)
- Tragen Sie bitte zuerst Ihre persönlichen Daten ein.
(*Enter your personal data first.*)
- Sie dürfen die Fragen in deutscher oder englischer Sprache beantworten!
(*You may answer the questions using either the German or the English language.*)

Persönliche Daten (*Personal data*):

Nachname	Vorname	Matrikelnr.	Studienfach	Semester

Bewertung:

Aufg.	1	2	3	4	Summe
Punkte					

1. Modellierung (*Modeling*) (9 P.)

Ein Unternehmen stellt zwei Produkte A und B mit einem Deckungsbeitrag von 3 Geldeinheiten je Mengeneinheit von Produkt A bzw. 2 Geldeinheiten je Mengeneinheit von Produkt B her. Die Herstellung einer Mengeneinheit von Produkt A benötigt 5 Zeiteinheiten, die Herstellung einer Mengeneinheit von Produkt B benötigt 4 Zeiteinheiten. Insgesamt stehen 1800 Zeiteinheiten zur Verfügung. Aufgrund der beschränkten Nachfrage können jedoch insgesamt (für Produkt A und Produkt B zusammen) nur 750 Mengeneinheiten verkauft werden.

(A company manufactures the products A and B with a contribution margin of 3 monetary units per unit of product A, and 2 monetary units per unit of product B, respectively. The production of one unit of product A requires 5 time units, the production of one unit of product B requires 4 time units. In total, 1800 time units are available for production. Due to demand constraints, a maximum of only 750 units can be sold (for product A and product B combined).)

- (a) Formulieren Sie ein **lineares** Optimierungsmodell, in welchem unter den genannten Nebenbedingungen der Deckungsbeitrag maximiert wird. Erläutern Sie die Bedeutung der verwendeten Entscheidungsvariablen.

*(Formulate a **linear** algebraic optimization model maximizing the contribution margin under consideration of the given restrictions. Explain the decision variables you are using.)* (4 P.)

- (b) Erweitern Sie obiges Modell um folgenden Aspekt: Damit eine Produktart überhaupt gefertigt werden kann, muss für diese Produktart eine spezielle Maschine angemietet werden. Es fallen dafür mengenunabhängige Mietkosten in Höhe von 200 Geldeinheiten bei Produkt A bzw. 250 Geldeinheiten bei Produkt B an. Diese Kosten fallen nicht an, wenn eine Produktart nicht hergestellt wird. Geben Sie die veränderte Zielfunktion und die veränderten bzw. zusätzlichen Nebenbedingungen an. Verwenden Sie dabei die folgende Variable:

$$y_A, y_B = \begin{cases} 1, & \text{wenn Produkt A/B produziert wird.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Sollten Sie zusätzliche Parameter benötigen, so geben Sie diese bitte an. Es soll sich weiterhin um ein **lineares** Modell handeln.

(Extend the model above by the following aspect: As a requirement for manufacturing a specific product at all, a product-specific machine has to be rented. The respective renting costs are independent of the production quantity and amount to 200 monetary units for product A and 250 monetary units for product B. These costs do not occur if the respective product is not produced. Specify the modified objective function and the changed or added constraints. Use the following variable:

$$y_A, y_B = \begin{cases} 1, & \text{if product A/B is manufactured.} \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (2)$$

*If you need additional parameters, please indicate them. Assure that the model remains **linear!**) (5 P.)*

2. Verbesserungssuche (*Improvement search*) (12 P.)

- (a) Nehmen Sie an, dass für das folgende mathematische Programm eine optimale Lösung gesucht wird:

(*Suppose that we are searching for an optimal solution to the given mathematical program.*)

$$\begin{array}{ll} \min & 8w_1 + 5w_2 \\ \text{s.t.} & w_1 + w_2 \leq 12 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie für die aktuelle Lösung $\mathbf{w}^{(7)} = (3, 7)$ die maximale Schrittweite λ in die zulässige und verbessernde Richtung $\Delta\mathbf{w} = (1, -5)$. Zeigen Sie, dass sich bei dieser Richtung die Lösung für jedes beliebige $\lambda > 0$ tatsächlich verbessert.

(*For the current solution $\mathbf{w}^{(7)} = (3, 7)$, determine the maximum step size λ using the feasible improving direction $\Delta\mathbf{w} = (1, -5)$. Show that the direction indeed improves the solution for any $\lambda > 0$.)* (7 P.)

- (b) Grenzen Sie die Begriffe **globales** und **lokales** Optimum voneinander ab. Welche Besonderheit weist jedes lokale Optimum in einem **linearen** Programm auf? Begründen Sie Ihre Antwort. Gehen Sie dabei auf die Linearität der Zielfunktion und auf die Linearität der Nebenbedingungen ein.

*(Distinguish the terms **global** and **local** optimum. Which special feature does each local optimum have in a **linear** program? Explain your answer. Respond to the linearity of the objective function as well as to the linearity of the constraints in your explanation.) (5 P.)*

3. **Lineare Programmierung (*Linear Programming*) (27 P.)**

Gegeben sei das folgende lineare Maximierungsproblem:

(*Consider the following linear maximization problem:*)

$$\text{Max } 40x_1 + 14x_2 + 24x_3$$

u.B.d.R. (*s. t.*)

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &\geq 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 17 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Geben Sie das obige lineare Programm in Standardform an. Verwenden Sie x_4 als Schlupfvariable für die erste und x_5 als Schlupfvariable für die zweite Nebenbedingung.

(*Specify the given linear program in standard form. Use x_4 and x_5 as slack variables for the first and for the second restriction, respectively.*) (3 P.)

- (b) Führen Sie eine Iteration der Simplex-Suche durch. Nutzen Sie dafür die gegebene Tabelle. Beginnen Sie mit x_3 und x_5 als Basisvariablen.

(*Perform one iteration of the simplex search. Use the given table. Start with x_3 and x_5 as basic variables.*) (11 P.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
max \mathbf{c}						\mathbf{b}
\mathbf{A}						
t=0						
$\mathbf{x}^{(0)}$						$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^{(0)} =$
$\Delta \mathbf{x}$ for x_{\dots}						$\bar{c}_{\dots} =$
$\Delta \mathbf{x}$ for x_{\dots}						$\bar{c}_{\dots} =$
$\Delta \mathbf{x}$ for x_{\dots}						$\bar{c}_{\dots} =$
						$\lambda =$
t=1						
$\mathbf{x}^{(1)}$						$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^{(1)} =$

- (c) Bei der optimalen Lösung des dargestellten linearen Programms mit CPLEX in GAMS erhalten Sie die folgende Ausgabe. Die unbeschränkte Variable z gibt den Wert der Zielfunktion an.

(The model above was solved to optimality using CPLEX in GAMS with the following output. The free variable z denotes the objective function value.)

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
EQU Objective	.	.	.	1.000
EQU Constraint1	12.000	12.000	+INF	-3.000
EQU Constraint2	-INF	17.000	17.000	20.000
VAR z	-INF	304.000	+INF	.
VAR x_1	.	5.500	+INF	.
VAR x_2	.	6.000	+INF	.
VAR x_3	.	.	+INF	-24.000

- i. Geben Sie die optimale Lösung x^* und den zugehörigen Zielfunktionswert an. Welche Nebenbedingungen sind bei der optimalen Lösung aktiv? Woran erkennen Sie das?

(State the optimal solution x^ and the optimal objective function value. Which constraints are active at the optimal solution x^* ? How do you identify the active constraints?) (3 P.)*

- ii. Welche Änderung des Zielfunktionswerts erwarten Sie bei einer Erhöhung der rechten Seite der ersten Nebenbedingung um eine Einheit? Begründen Sie Ihre Antwort.

(What change of the objective function value do you expect if the right-hand side of constraint (1) is increased by 1 unit? Explain your answer.) (1 P.)

- iii. Wie würde sich das Ergebnis ändern, wenn die rechte Seite der ersten Nebenbedingung um 100 Einheiten oder mehr erhöht würde? Begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Betrachten Sie nicht nur den Zielfunktionswert.
(*How would the solution change if we increase the right-hand side of constraint (1) by 100 units or more? Explain your answer. Hint: Also consider other aspects than the objective function value.*) (2 P.)

- (d) Geben Sie das duale Programm zu dem in der Aufgabenstellung gegebenen ursprünglichen Modell an.
(*Write down the dual program corresponding to the given original model.*) (5 P.)

- (e) Betrachten Sie die in Teilaufgabe (c) angegebene Ausgabe von GAMS. Geben Sie die optimale Lösung v^* und den optimalen Zielfunktionswert des dualen Problems an.
(*Consider the GAMS output in task (c). What is the optimal solution v^* and the optimal objective function value of the dual model?*) (2 P.)

4. Branch & Bound (12 P.)

Die folgende Tabelle zeigt für ein binäres Maximierungsproblem mit Entscheidungsvariablen $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ für alle Kombinationen von fixierten und freien (d.h., binär-relaxierten) Variablen die Relaxationsoptima \tilde{x} mit Zielfunktionswert \tilde{v} .

(The following table depicts the LP relaxation optima \tilde{x} with objective function value \tilde{v} for all combinations of fixed and free (i.e., binary-relaxed) variables of a binary maximization problem with decision variables $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$.)

x_1	x_2	x_3	\tilde{x}	\tilde{v}
#	#	#	(0.92, 1.00, 0.00)	9.333
#	#	0	(0.92, 1.00, 0.00)	9.333
#	#	1	(0.00, 0.50, 1.00)	6.000
#	0	#	(1.00, 0.00, 0.08)	8.417
#	0	0	(1.00, 0.00, 0.00)	8.000
#	0	1	(0.08, 0.00, 1.00)	5.667
#	1	#	(0.92, 1.00, 0.00)	9.333
#	1	0	(0.92, 1.00, 0.00)	9.333
#	1	1	Infeasible	
0	#	#	(0.00, 1.00, 0.92)	6.583
0	#	0	(0.00, 1.00, 0.00)	2.000
0	#	1	(0.00, 0.50, 1.00)	6.000
0	0	#	(0.00, 0.00, 1.00)	5.000
0	0	0	(0.00, 0.00, 0.00)	0.000
0	0	1	(0.00, 0.00, 1.00)	5.000
0	1	#	(0.00, 1.00, 0.92)	6.583
0	1	0	(0.00, 1.00, 0.00)	2.000
0	1	1	Infeasible	
1	#	#	(1.00, 0.50, 0.00)	9.000
1	#	0	(1.00, 0.50, 0.00)	9.000
1	#	1	Infeasible	
1	0	#	(1.00, 0.00, 0.08)	8.417
1	0	0	(1.00, 0.00, 0.00)	8.000
1	0	1	Infeasible	
1	1	#	Infeasible	
1	1	0	Infeasible	
1	1	1	Infeasible	

Bestimmen Sie die optimale Lösung des binären Maximierungsproblems durch Anwendung des Branch&Bound-Algorithmus 12A mit den folgenden Spezifikationen. Geben Sie die optimale Lösung an.

- Führen Sie eine Tiefensuche durch!
- Wenn Sie zwischen aktiven Kandidatenproblemen auszuwählen haben, so erzeugen Sie zunächst das durch Aufrunden ($x_i = 1$) entstehende Teilproblem, und erst später das durch Abrunden ($x_i = 0$) entstehende Teilproblem.
- Nummerieren Sie die Kandidatenprobleme in der Reihenfolge, in der sie deren Relaxationen analysieren.
- Dokumentieren Sie in dem von Ihnen gezeichneten Suchbaum für jedes Kandidatenproblem das Relaxationsergebnis und die resultierende Entscheidung.

(Determine the optimal solution of the binary maximization problem by applying the Branch&Bound Algorithm 12A with the following specifications. Write down the optimal solution.

- *Perform a depth-first search!*
- *When selecting between active candidate problems, break ties in favor of $x_i = 1$, i.e., first create a new candidate by rounding up, and only later by rounding down ($x_i = 0$).*
- *Number the candidate problems in the sequence you analyze their relaxations.*
- *Document the relaxation outcome and the resulting decision of each candidate problem in your drawn search tree.)*