Leibniz Universität Hannover
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Institut für Produktionswirtschaft
Prof. Dr. Stefan Helber

Klausur zur Vorlesung
"Stochastic Models in Production and Logistics"
im Sommersemester 2017

Hinweise:

1. Die Klausur besteht aus **11** Seiten (inkl. Deckblatt). Bitte überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar komplett ist und lassen Sie sich ggf. ein anderes geben.
2. Alle Aufgaben sind zu bearbeiten.
3. Bei einer Klausurdauer von 60 Minuten sind insgesamt 60 Punkte zu erreichen.
4. **Der Lösungsweg muss erkennbar sein!** Wenn Sie zur Beantwortung einer Frage eine Formel verwenden, so geben Sie diese zunächst in allgemeiner Form an!
5. Als Hilfsmittel ist ein nicht alpha-numerisch programmierbarer Taschenrechner zulässig sowie ein beidseitig handbeschriebenes Hilfsblatt im Format DIN A4 mit Formeln etc. nach Ihrer Wahl.
6. Zur Beantwortung der Fragen finden Sie genügend Platz in der Klausur. Bitte reißen Sie die Klausur nicht auseinander und verwenden Sie kein eigenes Papier.
7. Tragen Sie bitte zuerst Ihre persönlichen Daten ein.
8. Sie dürfen die Fragen in deutscher oder englischer Sprache beantworten!
   (*You may answer the questions using either the German or the English language.*)

Persönliche Daten:

Nachname	Vorname	Matrikelnr.	Studienfach	Semester

Bewertung:

Aufg.	1	2	3	4	5	Summe
Punkte						

1. **Modellierung mit Markow-Ketten in stetiger Zeit (*Modeling via Continuous Time Markov Chains*) (25 P.)**

   Ein Fließproduktionssystem besteht aus zwei Maschinen mit einem dazwischenliegendem Puffer, welcher C Werkstücke aufnehmen kann. Die erste Maschine hungert nie, die zweite ist nie blockiert. Die erste Maschine weist exponentialverteilte Bearbeitungszeiten mit Rate μ_1 auf. Diese erste Maschine fällt nie aus. Die zweite Maschine weist exponentialverteilte Bearbeitungszeiten mit Rate μ_2 auf. Die zweite Maschine ist unzuverlässig. Die Zeiten zum Ausfall (also die störungsfreien Laufzeiten) und die Reparaturdauern sind exponentialverteilt. Wenn diese Maschine 2 arbeitet, so fällt sie mit Rate p_2 aus. Wenn die Maschine 2 ausgefallen ist, so wird sie mit Rate r_2 repariert. Wenn ein Werkstück von Maschine 1 bearbeitet worden ist und der stromabwärts gelegene Puffer voll ist, so verbleibt das Werkstück auf der Maschine 1, die dann blockiert ist (BAS, blocking after service).

   Der Zustand des Systems wird durch den Vektor $s = (n, \alpha_2)$ beschrieben. Dabei stellt n die Anzahl der Werkstücke im System dar, die bereits von Maschine 1 fertig bearbeitet wurden. Wenn die zweite Maschine intakt ist, so ist $\alpha_2 = 1$, im Falle einer Störung ist $\alpha_2 = 0$.

   (*A flow line consists of two machines with a buffer in between. The buffer can hold C work pieces. The first machine is never starved, the second is never blocked. Procecessing times of the first machine are exponentially distributed with rate μ_1. This first machine never fails. Procecessing times of the second machine are exponentially distributed with rate μ_2. The second machine is unreliable. The times to failure and the times to repair are exponentially distributed. When machine 2 is working, it fails with rate p_2. When machine 2 is down, it gets repaired with rate r_2. If a work piece has been processed by machine 1 and the downstream buffer is full, the work piece remains at machine 1 which is then blocked. (BAS, blocking after service)*

   The state of the system is described through the vector $s = (n, \alpha_2)$. Here n denotes the number of work pieces that have already been processed by machine 1. If the ~~first~~ second machine is operational, we denote this as $\alpha_2 = 1$. If it has failed and is currently under repair, we have $\alpha_2 = 0$.)

a) Nehmen Sie an, dass der Puffer $C = 2$ Werkstücke aufnehmen kann. Zeichnen Sie für diesen Fall das Diagramm der Zustände und Übergänge!

(*Assume that the buffer can hold $C = 2$ work pieces. Draw the diagram of states and transitions!*) (13 P.)

b) Geben Sie die beiden allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Zustandswahrscheinlichkeiten für die <u>internen</u> Zustande $s = (n, \alpha_2)$ mit $2 \leq n \leq C + 1$ und $\alpha_2 \in \{1, 0\}$ an!

(*Give the two general balance equations for the steady-state probabilities of the* <u>*internal*</u> *states* $s = (n, \alpha_2)$ *with* $2 \leq n \leq C + 1$ *and* $\alpha_2 \in \{1, 0\}$*!*) (6 P.)

c) Geben Sie eine Formel zur Bestimmung des mittleren Bestandes $\bar{n}$ im System an!

(*Give a formula to determine the average inventory level* $\bar{n}$ *of the system!*) (2 P.)

d) Geben Sie zwei verschiedene Formeln zur Bestimmung des Durchsatzes des Systems an!
(*Give two different formulas to determine the throughput of the system!*) (4 P.)

2. **Exponentialverteilung (*Exponential distribution*) (9 P.)**

   Eine zufällige Zeitdauer werde modelliert durch eine Zufallsvariable T. Diese folge einer Exponentialverteilung mit Rate $\lambda = \frac{5}{\mathrm{h}}$.

   (A random time is modeled via a random variable T which follows an exponential distribution with rate $\lambda = \frac{5}{\mathrm{h}}$.)

   a) Ermitteln Sie die Standardabweichung der Zufallsvariablen T.

   (*Determine the standard deviation of the random variable T.*) (2 P.)

   b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{Prob}(3\ \mathrm{h} \leq T \leq 7\ \mathrm{h})$.

   (Determine the probability $\mathrm{Prob}(3\ \mathrm{h} \leq T \leq 7\ \mathrm{h})$.) (3 P.)

c) Ermitteln Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\text{Prob}(T \geq 5\ \text{h} | T \geq 1\ \text{h})$.
(Determine the conditional probability $\text{Prob}(T \geq 5\ \text{h} | T \geq 1\ \text{h})$.) (2 P.)

d) Ermitteln Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\text{Prob}(T \geq 1\ \text{h} | T \geq 5\ \text{h})$.
(Determine the conditional probability $\text{Prob}(T \geq 1\ \text{h} | T \geq 5\ \text{h})$.) (2 P.)

3. **Zufällige Ankünfte (*Random arrivals*): (10 P.)**

Poisson-Prozesse werden gelegentlich als "zufällige Ankünfte" bezeichnet. Erläutern Sie, was damit gemeint ist, und bestimmen Sie dazu für $s \leq t$

$$\text{Prob}\{X_1 < s | N(t) = 1\}$$

Dabei bezeichnet $N(t)$ die Anzahl der Ankünfte bis zum Zeitpunkt t bei einem Poisson'schen Ankunftsprozess. Die Zufallsvariable X_1 stellt den Zeitpunkt der ersten Ankunft dar. Erläutern Sie jeden Schritt Ihrer Berechnung und stellen Sie den Zusammenhang mit dem Begriff der "zufälligen Ankünfte" her.

(Poisson processes are sometimes referred to as "random arrivals". Explain what is meant. To this end, determine for $s \leq t$ the probability

$$\text{Prob}\{X_1 < s | N(t) = 1\}$$

where $N(t)$ denotes the number of arrivals up to time t of a Poisson arrival process. The random variable X_1 denotes the time of the first arrival. Explain each step of your calculation. Relate your result to the concept of "random arrivals.")

4. **Markow-Ketten in diskreter Zeit (*Discrete time Markov chains*): (11 P.)**

Markow-Ketten in diskreter Zeit seien durch die folgenden Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten beschrieben:

(*Assume that the following transition probability matrices describe discrete time Markov chains:*)

$$P_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Erläutern Sie für jede der Markow-Ketten A, B sowie C, ob diese

a) eine stationäre Verteilung,

b) eine Grenzverteilung, und/oder

c) eine Gleichgewichtsverteilung

aufweist. Falls es eine Gleichgewichtsverteilung gibt, so erläutern Sie, wie diese bestimmt werden kann.

(Explain for each of the Markov chains A, B, and C whether it has

a) *a stationary distribution,*

b) *a limiting distribution, and/or*

c) *a steady-state distribution.*

In case it has a steady-state distribution, explain how it can be determined.)

5. **Warteschlangensysteme (*Queueing systems*): (5 P.)**

Sarah verkauft selbst angebautes Gemüse auf einem Wochenmarkt. Die Ankünfte der Kunden folgen einem Poisson-Prozess mit im Mittel 8 Ankünften pro Stunde. Die Kunden werden nacheinander bedient. Die Bedienzeit folgt einer Exponentialverteilung mit Erwartungswert von sechs Minuten.

(*Sarah is selling home-grown vegetables at a weekly market. Arrivals of customers follow a Poisson process with mean of 8 arrivals per hour. Each customer is served one at a time. The service times follow an exponential distribution with mean service time of six minutes.*)

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein eintreffender Kunde warten muss?

(*What ist the probability that an arriving customer has to wait in the queue before being served?*) (1 P.)

b) Wie groß ist die mittlere Anzahl wartender Kunden?

(*What ist average queue length?*) (2 P.)

c) Wie groß ist die mittlere Verweilzeit der Kunden an Sarahs Verkaufsstand?

(*What is the average response time of the customers at Sarahs counter?*) (2 P.)