Leibniz Universität Hannover
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Institut für Produktionswirtschaft
Prof. Dr. Stefan Helber

Wiederholungsklausur zur Vorlesung
"Stochastic Models in Production and Logistics"
im Wintersemester 2018/2019
Belegnummer: 171164

Hinweise:

1. Die Klausur besteht aus **12** Seiten (inkl. Deckblatt). Bitte überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar komplett ist und lassen Sie sich ggf. ein anderes geben.
   (*The exam consists of **12** pages (including the cover sheet). Please check your copy for completeness and ask for a new one in case of missing pages.*)
2. Alle Aufgaben sind zu bearbeiten.
   (*All tasks are mandatory.*)
3. Bei einer Klausurdauer von 60 Minuten sind insgesamt 60 Punkte zu erreichen.
   (*Within the exam's time frame of 60 minutes 60 points are potentially attainable.*)
4. **Der Lösungsweg muss erkennbar sein!** Wenn Sie zur Beantwortung einer Frage eine Formel verwenden, so geben Sie diese zunächst in allgemeiner Form an!
   (***Your solution approach has to be comprehensible**. If you are answering a question using a formula, note the formal shape of it first.*)
5. Als Hilfsmittel ist ein nicht alpha-numerisch programmierbarer Taschenrechner zulässig sowie ein beidseitig handbeschriebenes Hilfsblatt im Format DIN A4 mit Formeln etc. nach Ihrer Wahl.
   (*Permitted items and materials are a non-programmable calculator and a handwritten two-sided standard DIN A4 sheet with formulas, notes etc. of your choice.*)
6. Zur Beantwortung der Fragen finden Sie genügend Platz in der Klausur. Bitte reißen Sie die Klausur nicht auseinander und verwenden Sie kein eigenes Papier.
   (*To answer the questions you will find enough space in the exam sheets. Do not use your own paper and refrain from tearing the exam apart.*)
7. Tragen Sie bitte zuerst Ihre persönlichen Daten ein.
   (*Enter your personal data first.*)
8. Sie dürfen die Fragen in deutscher oder englischer Sprache beantworten!
   (*You may answer the questions using either the German or the English language.*)

Persönliche Daten *(personal data)***:**

Nachname *Surname*	Vorname *First Name*	Matrikelnr. *Matriculation Nr.*	Studienfach *Field of Study*	Semester *Semester*	Platznummer *Seat Number*

Bewertung:

Aufg.	1	2	3	4	5	Summe
Punkte						

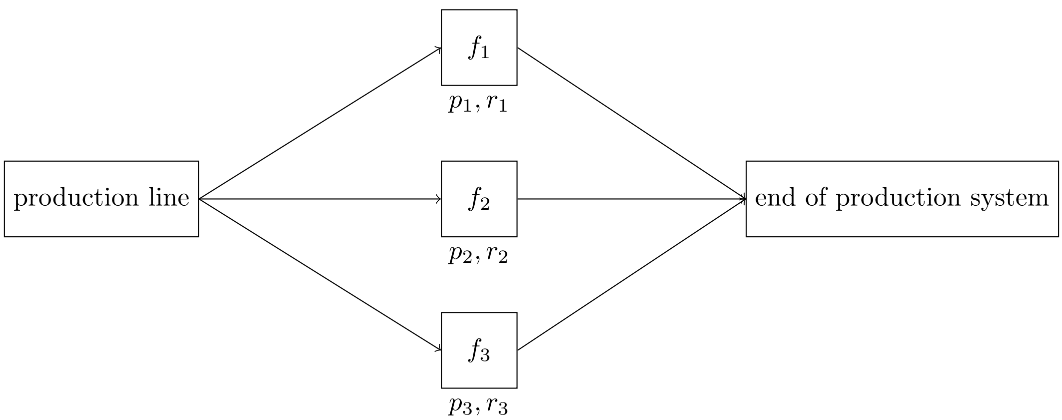
1. **Modellierung mit Markov-Ketten in stetiger Zeit (*Modeling using Continuous Time Markov Chains*) (22 P.)**

   Am Ende einer Produktionslinie für ein flüssiges Gut befinden sich drei parallele Filteranlagen. Die Filteranlagen sind hierbei unzuverlässig. Die Zeiten zum Ausfall (also die störungsfreien Laufzeiten) und die Reparaturdauern sind exponentialverteilt. Die Ausfallrate für Filteranlage f_1 wird mit p_1 bezeichnet. Bei einem Ausfall wird die Anlage mit der Rate r_1 wieder instand gesetzt. Filteranlage f_2 fällt mit der Rate p_2 aus und wird mit der Rate r_2 repariert. Ebenso fällt Filteranlage f_3 mit der Rate p_3 aus und wird mit Rate r_3 repariert. Die Produktionsrate des Systems ist davon abhängig, wie viele Filteranlagen einsatzfähig sind. Bei drei einsatzfähigen Filteranlagen beträgt die Produktionsrate μ_3. Bei zwei einsatzfähigen Filteranlage fällt die Produktionsrate auf μ_2, wobei unerheblich ist, welche Filteranlagen noch einsatzfähig sind. Die Produktionsrate bei einer einzelnen einsatzfähigen Filteranlage beträgt μ_1. Sollten alle Filteranlagen ausfallen, kommt das komplette Produktionssystem zum Stillstand. In diesem Fall werden alle Filteranlagen gleichzeitig mit der Rate r_0 repariert, sodass nach abgeschlossener Reparatur alle Filteranlagen wieder zu Verfügung stehen. Bei Produktionsstopp, also wenn alle Filteranlagen ausgefallen sind, beträgt die Produktionsrate $\mu_0 = 0$.

   Der Zustand des Systems wird durch den Vektor $s = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ beschrieben. Wenn die erste Filteranlage intakt ist, so ist $\alpha_1 = 1$, im Falle einer Störung ist $\alpha_1 = 0$. Entsprechend ist $\alpha_2 = 1$, wenn die zweite Filteranlage intakt ist und $\alpha_2 = 0$ im Fall einer Störung. Äquivalent ist $\alpha_3 = 1$, wenn die dritte Filteranlage einsatzfähig ist und $\alpha_3 = 0$, sofern sie repariert werden muss.

   (*At the end of a production line for a liquid product, the product has to pass three parallel filter systems. The filter systems are unreliable. The times to failure and the times to repair are exponentially distributed. The failure rate of filter system f_1 is denoted by p_1. If filter system f_1 fails, it is repaired with rate r_1. Similarly, filter system f_2 fails with rate p_2 and is repaired with rate r_2. Lastly, filter system f_3 fails with rate p_3 and is repaired with rate r_3. The production rate of the system is dependant on the number of available filter systems. If all three filter systems are available, the production rate is μ_3. In case only two filter systems are operational, the production rate is reduced to μ_2. In this regard, it is irrelevant, which filter system is currently down. If only one filter system is available, the production rate equals μ_1. Should all filter systems be non-operational at the same time, the whole production line comes to a halt. In this case, all machines are repaired simultaneously with rate r_0. Thus, all filter systems are available again when repairs have finished. Further, the production rate equals $\mu_0 = 0$ if all filter systems are down.*

   The state of the system is described through the vector $s = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. If the first filter system is operational, we denote this by $\alpha_1 = 1$. If it has failed and is currently under repair, we have $\alpha_1 = 0$. If the second filter system is operational, we have $\alpha_2 = 1$ and if it is currently being repaired, we denote this by $\alpha_2 = 0$. Lastly, if the third filter system is operational then $\alpha_3 = 1$ and if it is down then $\alpha_3 = 0$.)



$0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3$

a) Zeichnen Sie das Diagramm aller Zustände und Übergänge.
(*Draw the diagram of all states and transitions.*) (12 P.)

b) Geben Sie die Matrix der Übergangsraten Q an.
(*Write down the matrix of transition rates (generator matrix)* Q.) (4 P.)

c) Geben Sie für den Zustand $s(0,0,0)$ die Gleichgewichtsbedingung der Zustandswahrscheinlichkeit an.
(*Write down the general balance equation for the steady-state probability of the state* $s(0,0,0)$.) (2 P.)

d) Geben Sie eine Formel zur Bestimmung des Durchsatzes des Systems an.
(*Write down a formula to determine the throughput of the system.*) (4 P.)

2. **Exponentialverteilung (*Exponential Distribution*) (10 P.)**

Eine zufällige Zeitdauer wird durch die exponentialverteilte Zufallsvariable X modelliert, welche die Rate $\lambda = \frac{1}{2}$ ZE^{-1} besitzt. "ZE" bezeichnet hierbei Zeiteinheiten.
(*A random time is modeled using the exponentially distributed random variable X, which has the rate $\lambda = \frac{1}{2}$ TU^{-1}. "TU" is referring to time units*)

a) Bestimmen Sie nachvollziehbar die Standardabweichung der exponentialverteilten Zufallszahl.

(*Determine the standard deviation of the exponentially distributed random variable in a comprehensible manner.*) (2 P.)

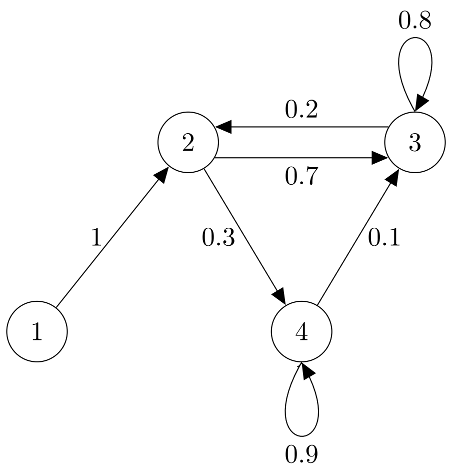
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $Prob\{1 \text{ ZE} \leq X \leq 5 \text{ ZE}\}$, dass die Zufallsvariable X im Intervall $[1, 5]$ ZE liegt.

(*Determine the probability $Prob\{1\ TU \leq X \leq 5\ TU\}$ that X lies in the interval $[1, 5]$ TU.*) (3 P.)

c) Zeigen Sie formal, dass die Exponentialverteilung die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit besitzt. (*Formally show that the exponential distribution possesses the memorylessness property.*) (5 P.)

3. **Markov-Ketten in diskreter Zeit (*Discrete time Markov chains*): (11 P.)**

Eine Markov-Kette in diskreter Zeit sei durch den folgenden Übergangsgraphen beschrieben:
(*A Markov chain in discrete time is defined by the following transition diagram:*)



a) Geben Sie die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten an.
(*Write down the matrix of transition probabilities.*) (2 P.)

b) Erläutern Sie jeweils, ob die beschriebene Markov-Kette eine Grenzverteilung, eine stationäre Verteilung und/oder eine Gleichgewichtsverteilung besitzt.
(*Explain whether the Markov chain has a limiting distribution, a stationary distribution and/or a steady-state distribution.*) (5 P.)

c) Erläutern Sie stichpunktartig, wie die stationäre Verteilung einer Markov-Kette in diskreter Zeit bestimmt werden kann.
(*Briefly explain how the stationary distribution of a discrete time Markov chain can be determined.*) (4 P.)

4. **Warteschlangensysteme (*Queuing Systems*) (6 P.)**

An der Essenausgabe der Contine treffen zur Mittagszeit Kunden nach einem Poissonprozess mit einem Mittel von 3 Ankünften pro Minute ein. Die Kunden werden nacheinander von einer verteilenden Person bedient. Die Bedienzeit folgt einer Exponentialverteilung mit einem Erwartungswert von 10 Sekunden.

(*At the counter of the Contine customers arrive following a Poisson-Process with mean 3 arrivals per minute at lunch time. Each customer is served one at a time by a single distributor. The service times follow an exponential distribution with mean service time of 10 seconds.*)

a) Wie groß ist die mittlere Anzahl an Kunden im System?
(*What is the average number of customers in the system?*) (2 P.)

b) Wie groß ist die mittlere Wartezeit an der Essenausgabe?
(*What is the average waiting time at the counter?*) (2 P.)

c) Wie groß ist die mittlere Verweilzeit der Kunden an der Essenausgabe?
(*What is the average response time of customers at the counter?*) (2 P.)

5. **Erzeugung von nichtgleichverteilten Zufallszahlen (*Generating Nonuniformly Distributed Random Numbers*) (11 P.)**

   Die Inversionsmethode kann zur Erzeugung von nichtgleichverteilten Zufallszahlen verwendet werden.

   (*The inverse transformation method may be used to generate nonuniformly distributed random numbers.*)

   a) Erläutern Sie stichpunktartig das Vorgehen bei der Inversionsmethode.

      (*Briefly explain the approach of the inverse transformation method.*) (4 P.)

   b) Veranschaulichen Sie die Vorgehensweise anhand der Erzeugung einer exponentialverteilten Zufallszahl durch Anwendung der Inversionsmethode.

      (*Generate an exponentially distributed random number by applying the inverse transformation method.*) (7 P.)