Leibniz Universität Hannover
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Institut für Produktionswirtschaft
Prof. Dr. Stefan Helber

Klausur zur Vorlesung
"Stochastic Models in Production and Logistics"
im Sommersemester 2018
Belegnummer: 171164

Hinweise:

1. Die Klausur besteht aus **11** Seiten (inkl. Deckblatt). Bitte überprüfen Sie, ob Ihr Exemplar komplett ist und lassen Sie sich ggf. ein anderes geben.
   (*The exam consists of **11** pages (including the cover sheet). Please check your copy for completeness and ask for a new one in case of missing pages.*)
2. Alle Aufgaben sind zu bearbeiten.
   (*All tasks are mandatory.*)
3. Bei einer Klausurdauer von 60 Minuten sind insgesamt 60 Punkte zu erreichen.
   (*Within the exam's time frame of 60 minutes 60 points are potentially attainable.*)
4. **Der Lösungsweg muss erkennbar sein!** Wenn Sie zur Beantwortung einer Frage eine Formel verwenden, so geben Sie diese zunächst in allgemeiner Form an!
   (*Your solution approach has to be comprehensible. If you are answering a question using a formula note the formal shape of it first.*)
5. Als Hilfsmittel ist ein nicht alpha-numerisch programmierbarer Taschenrechner zulässig sowie ein beidseitig handbeschriebenes Hilfsblatt im Format DIN A4 mit Formeln etc. nach Ihrer Wahl.
   (*Permitted items and materials are a non-programmable calculator and a handwritten two-sided standard DIN A4 sheet with formulas, notes etc. of your choice.*)
6. Zur Beantwortung der Fragen finden Sie genügend Platz in der Klausur. Bitte reißen Sie die Klausur nicht auseinander und verwenden Sie kein eigenes Papier.
   (*To answer the questions you will find enough space in the exam sheets. Do not use your own paper and refrain from tearing the exam apart.*)
7. Tragen Sie bitte zuerst Ihre persönlichen Daten ein.
   (*Enter your personal data first.*)
8. Sie dürfen die Fragen in deutscher oder englischer Sprache beantworten!
   (*You may answer the questions using either the German or the English language.*)

Persönliche Daten *(personal data)***:**

Nachname *Surname*	Vorname *First Name*	Matrikelnr. *Matriculation Nr.*	Studienfach *Field of Study*	Semester *Semester*	Platznummer *Seat Number*

Bewertung:

Aufg.	1	2	3	4	Summe
Punkte					

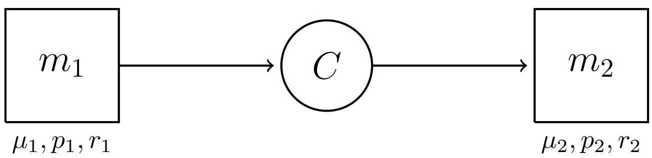
1. **Modellierung mit Makov-Ketten in stetiger Zeit (*Modeling using Continuous Time Markov Chains*) (25 P.)**

   Ein Fließproduktionssystem besteht aus zwei Maschinen mit einem dazwischenliegenden Puffer, welcher C Werkstücke aufnehmen kann. Die erste Maschine hungert nie, die zweite ist nie blockiert. Die erste Maschine weist exponentialverteilte Bearbeitungszeiten mit Rate μ_1 auf. Die zweite Maschine weist ebenso exponentialverteilte Bearbeitungszeiten mit Rate μ_2 auf. Beide Maschinen sind unzuverlässig. Die Zeiten zum Ausfall (also die störungsfreien Laufzeiten) und die Reparaturdauern sind exponentialverteilt. Wenn die erste Maschine arbeitet, so fällt sie mit Rate p_1 aus. Wenn die erste Maschine ausgefallen ist, so wird sie mit Rate r_1 repariert. Die zweite Maschine fällt mit der Rate p_2 aus und wird mit Rate r_2 repariert. Beide Maschinen können nur jeweils dann ausfallen, wenn sie in Betrieb sind (ODF, operation dependant failures). Wenn ein Werkstück von Maschine 1 bearbeitet worden ist und der stromabwärts gelegene Puffer voll ist, so verbleibt das Werkstück auf der ersten Maschine, die dann blockiert ist (BAS, blocking after service).

   Der Zustand des Systems wird durch den Vektor $s = (n, \alpha_1, \alpha_2)$ beschrieben. Dabei stellt n die Anzahl der Werkstücke im System dar, die bereits von Maschine 1 fertig bearbeitet wurden. Wenn die erste Maschine intakt ist, so ist $\alpha_1 = 1$, im Falle einer Störung ist $\alpha_1 = 0$. Entsprechend ist $\alpha_2 = 1$, wenn die zweite Maschine intakt ist und $\alpha_2 = 0$ im Fall einer Störung.

   (*A flow line consists of two machines with a buffer in between. The buffer can hold C work pieces. The first machine is never starved, the second is never blocked. The processing times of the first machine are exponentially distributed with rate μ_1 whereas the processing times of the second machine are exponentially distributed with rate μ_2. Both machines are unreliable. The times to failure and the times to repair are also exponentially distributed. When the first machine is working, it fails with rate p_1. When the first machine is down, it gets repaired with rate r_1. Similarly, when the second machine is working, it fails with rate p_2 and when it is down, it gets repaired with rate r_2. Both machines can only fail while they are actually working (ODF, operation dependant failures). If a work piece has been processed by the first machine and the downstream buffer is full, the work piece remains at the first machine which is then blocked (BAS, blocking after service).*

   The state of the system is described through the vector $s = (n, \alpha_1, \alpha_2)$. Here, n denotes the number of work pieces that have already been processed by machine 1. If the first machine is operational, we denote this by $\alpha_1 = 1$. If it has failed and is currently under repair, we have $\alpha_1 = 0$. If the second machine is operational, we have $\alpha_2 = 1$ and if it is currently being repaired, we denote this by $\alpha_2 = 0$.)



a) Nehmen Sie an, dass der Puffer $C = 1$ Werkstück aufnehmen kann. Zeichnen Sie für diesen Fall das Diagramm aller Zustände und Übergänge.

(*Assume that the buffer can hold* $C = 1$ *work piece. Draw the diagram of all states and transitions.*) (16 P.)

b) Geben Sie für den Zustand $s(1,1,1)$ die Gleichgewichtsbedingung der Zustandswahrscheinlichkeit an.

(*Write down the general balance equation for the steady-state probability of the state* $s(1,1,1)$.) (3 P.)

c) Geben Sie eine Formel zur Bestimmung des mittleren Bestandes $\overline{n}$ an.

(*Write down a formula to determine the average inventory level* $\overline{n}$ *of the system.*) (2 P.)

d) Geben Sie zwei verschiedene Formeln zur Bestimmung des Durchsatzes des Systems an.
(*Give two different formulas to determine the throughput of the system.*) (4 P.)

2. **Makov-Ketten in diskreter Zeit (*Discrete time Markov chains*): (20 P.)**

a) Erläutern Sie kurz, was im Kontext von stochastischen Prozessen in diskreter Zeit unter der Markov-Eigenschaft verstanden wird. Geben Sie in diesem Zusammenhang ebenfalls die formale mathematische Definition der Markov-Eigenschaft an.

(*Briefly explain the Markov property in the context of stochastic processes in discrete time. In this regard, write down the formal mathematical definition of the Markov property.*) (4 P.)

b) Die Transitionsmatrix $P(n)$ einer Markov-Kette in diskreter Zeit gibt die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen einzelnen Zuständen der Markov-Kette an. Erläutern Sie, welche zwei Eigenschaften die Elemente der Übergangsmatrix besitzen müssen.

(*The transition probability matrix $P(n)$ of a discrete time Markov chain defines the transition probabilities between individual states of the Markov-Chain. Write down and explain the two properties that the elements of the matrix have to satisfy.*) (4 P.)

c) Leiten Sie die Wahrscheinlichkeit her, dass sich eine diskrete und inhomogene Markov-Kette in Zustand j in Zeitschritt $n+1$ und in Zustand k in Zeitschritt $n+2$ befindet, unter der Voraussetzung, dass sie sich in Zustand i zu Zeitpunkt n befindet:

$$Prob\{X_{n+2} = k, X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

Erläutern Sie die Teilschritte Ihrer Herleitung und stellen Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} und p_{jk} dar.

(*Consider an inhomogeneous discrete time Markov chain. Derive the probability that the Markov chain is in state j at time step $n+1$ and in state k at time step $n+2$ given that the Markov chain is in state i at time step n.*)

$$Prob\{X_{n+2} = k, X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

(*Explain each step of your derivation and use the probabilities for a state change p_{ij} and p_{jk}.*)
(7 P.)

d) Ein Markov-Kette in diskreter Zeit sei durch die folgende Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten beschrieben:

(*Assume that the following transition probability matrix is describing a discrete time Markov chain:*)

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

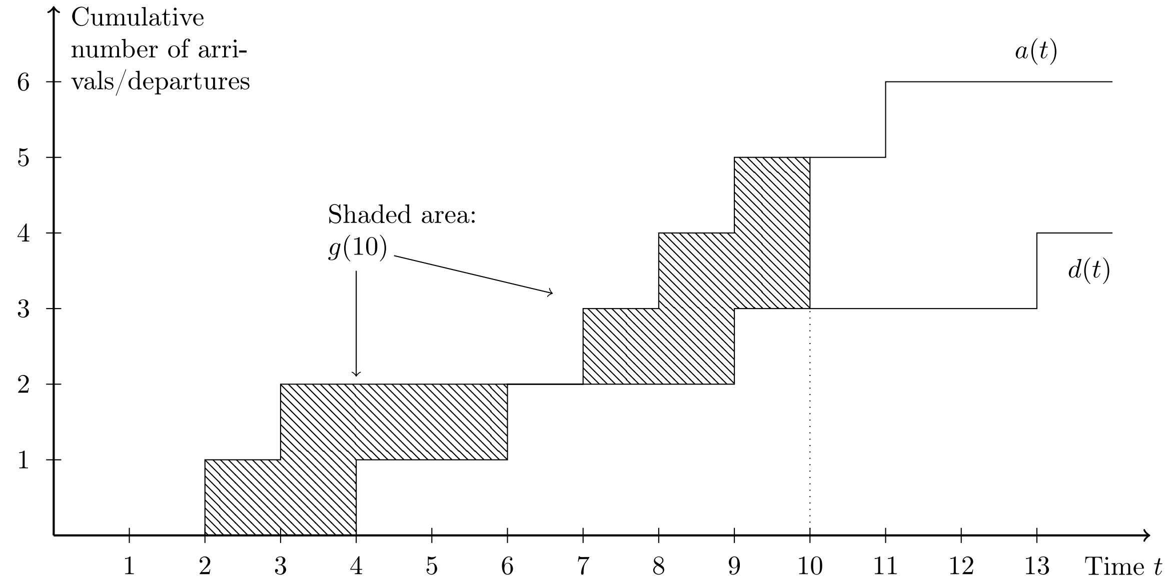
Klassifizieren Sie die Zustände und erläutern Sie, ob die Kette ergodisch ist.

(*Classify the states and explain whether the chain is ergodic.*) (5 P.)

3. **Warteschlangensysteme (*Queueing systems*): (10 P.)**

In der nachfolgenden Abbildung sind die kommulierten Ankünfte $a(t)$ und Abgänge $d(t)$ eines Bediensystems mit einem einzelnem Bediener und einer FCFS-Abfertigungsdiziplin graphisch dargestellt.

(*The following graph depicts the cumulative number of arrivals $a(t)$ and departures $d(t)$ of a single-server FCFS queuing system over a given time horizon.*)



a) Wie viele Kunden sind zum Zeitpunkt $t = 10$ im System?
(*How many customers are in the system at time $t = 10$?*) (1 P.)

b) Betrachten Sie den Zeitraum zwischen Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 13$. Geben Sie die Zeitintervalle an, zu denen der Bediener untätig ist.
(*Consider the time frame from $t = 0$ until $t = 13$. Write down the time intervals during which the server is idle.*) (2 P.)

c) Wie groß ist die mittlere Ankunftsrate λ im Zeitintervall $[0, 10]$?
(*What is the average arrival rate* λ *in the time interval* $[0, 10]$) (2 P.)

d) Erläutern Sie, was mit der schraffierte Fläche $g(10)$ dargestellt wird.
(*Explain, what the shaded area* $g(10)$ *is referring to.*) (1 P.)

e) Wie groß ist die mittlere Anzahl an Kunden L im System im Zeitintervall $[0, 10]$?
(*What is the average number of customers* L *in the system in the time interval* $[0, 10]$*?*) (2 P.)

f) Wie groß ist die mittlere Verweilzeit R im Zeitintervall $[0, 10]$?
(*What is the average response time* R *of customers in the system in the time interval* $[0, 10]$*?*) (2 P.)

4. **Erzeugung von Zufallszahlen (*Generating Random Numbers*) (5 P.)**

Ein linearer Kongurenzgenerator besitzt den Multiplikator $a = 2$, das Inkrement $c = 7$ und den Modulus $m = 10$.

(*A linear congurent random number generator has a multiplier* $a = 2$, *an increment* $c = 7$ *and a modulus* $m = 10$)

a) Erzeugen Sie die ersten vier ganzzahligen Werte z_i der Sequenz an Zufallszahlen und die zugehörigen Zufallszahlen u_i aus dem Intervall $[0, 1]$. Wählen Sie den Samen (*Seed*) $z_0 = 1$.

(*Generate the first four random integers* z_i *of the sequence and their associated random numbers* u_i *in the interval* $[0, 1]$. *Use the seed* $z_0 = 1$.) (3 P.)

b) Ist die erzeugte Sequenz an Zufallszahlen zufriedenstellend? Begründen Sie Ihre Antwort.

(*Is the generated sequence of random numbers satisfactory? Justify your answer.*) (2 P.)